5 ガウスの超幾何関数

5.1 ガウスの超幾何級数

複素数 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ をパラメータとする z のべき級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k} z^k \tag{5.1}$$

を**ガウスの超幾何級数**という. ここで, $s \in \mathbb{C}$ および $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $(s)_k$ は

$$(s)_k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} = \begin{cases} s(s+1)\cdots(s+k-1) & (k \geq 1) \\ 1 & (k=0) \end{cases}$$

を表す. とくに $(1)_k = k!$ である. また, γ は 0 や負の整数ではないとする.

命題 5.1 (1) α または β が 0 あるいは負の整数のとき, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は z の多項式となる.

(2) α, β が 0 でも負の整数でもないときは, べき級数 (5.1) の収束半径は 1 となり, 従って $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ における正則関数を表す.

演習 5.2 上記の命題を示せ.

さて, 特に (2) の場合に $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ を収束円を超えて可能な限り解析接続していくと (第 3 章の §3.10, 3.11 を参照), 非常に興味深いふるまいをする多価関数となる. その興味深いふるまいについて調べていくのが本章の目的である. そのために, まず, 特異点 (分岐点) がどこにあるかを見極める必要があるわけだが, 実は $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ が満たす微分方程式を調べると良い答えが得られる.

まず, **オイラー作用素**と呼ばれる微分作用素 D を

$$D = z\frac{d}{dz}$$

により定めると, $Dz^k = kz^k$ となるので,

$$\begin{aligned}(\alpha+D)(\beta+D)F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}(\alpha+k)(\beta+k)z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_k(1)_k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}(1)_{k+1}}(\gamma+k)(k+1)z^k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}(1)_{k+1}}(\gamma-1+(k+1))(k+1)z^{k+1} \\
&= z^{-1}(\gamma-1+D)D\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}(1)_{k+1}}z^{k+1} \\
&= z^{-1}(\gamma-1+D)D\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k}(\beta)_{k}}{(\gamma)_{k}(1)_{k}}z^{k} \\
&= z^{-1}(\gamma-1+D)DF(\alpha,\beta,\gamma;z) \qquad (Dz^0=0 \text{ に注意})
\end{aligned}
$$

を得る. よって, $f(z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は, 微分方程式

$$
z^{-1}(\gamma-1+D)Df=(\alpha+D)(\beta+D)f \tag{5.2}
$$

の解である. さらに,

$$
\begin{aligned}
z^{-1}\left(\gamma-1+z\frac{d}{dz}\right)\left(z\frac{d}{dz}\right)f &= z^{-1}\left(\gamma-1+z\frac{d}{dz}\right)(zf') \\
&= z^{-1}((\gamma-1)zf'+z(f'+zf'')) \\
&= zf''+\gamma f',
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha+z\frac{d}{dz}\right)\left(\beta+z\frac{d}{dz}\right)f &= \left(\alpha+z\frac{d}{dz}\right)(\beta f+zf') \\
&= \alpha\beta f+\beta zf'+\alpha zf'+z(f'+zf'') \\
&= z^2f''+(\alpha+\beta+1)zf'+\alpha\beta f
\end{aligned}
$$

なので, (5.2) を書き直すと次を得る.

定理 5.3 $f(z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は, 微分方程式

$$
z(1-z)f''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)f'-\alpha\beta f=0 \tag{5.3}
$$

の解である. この微分方程式は**ガウスの超幾何微分方程式**と呼ばれる.

ガウスの超幾何微分方程式は, 確定特異点型 (フックス型) と呼ばれるタイプの微分方程式となる. 次節ではまず確定特異点型微分方程式の一般論について説明する.

演習 5.4 $|z|<1$ において次が成り立つことを確かめよ.

(1) $(1-z)^{-\alpha}=F(\alpha,\beta,\beta;z)$,

(2) $(1+z)^{-\alpha}+(1-z)^{-\alpha}=2F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2};z^2\right)$,

(3) $-\log(1-z)=zF(1,1,2;z)$,

(4) $\log\frac{1+z}{1-z}=2zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};z^2\right)$.

演習 5.5 $|z| < 1$ において次が成り立つことを確かめよ.

(1) $e^z = \lim_{\beta \to \infty} F\left(1, \beta, 1; \frac{z}{\beta}\right)$,

(2) $\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)$,

(3) $\arctan z = zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right)$,

(4) $\cosh z = \lim_{\alpha,\beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4\alpha\beta}\right)$.

演習 5.6 オイラー作用素 $D = z\frac{d}{dz}$ について, 任意の自然数 k および k 回微分可能な関数 f に対し

$$D(D-1)\cdots(D-k+1)f = z^k f^{(k)}$$

が成り立つことを示せ.

5.2 確定特異点型 (フックス型) 微分方程式

5.2.1 正則点での解の構成

一般に, 有理型関数 $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_n(z)$ を係数とする線形常微分方程式

$$p_0(z)f^{(n)} + p_1(z)f^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(z)f' + p_n(z)f = 0 \tag{5.4}$$

を考える. $p_0(z)$ は恒等的に 0 ではないとする.

定義 5.7 $a \in \mathbb{C}$ について, $z = a$ が微分方程式 (5.4) の**正則点**であるとは, n 個の関数

$$\frac{p_1(z)}{p_0(z)}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

がすべて $z = a$ で正則であることをいう. また, 正則点でない点を**特異点**という.

定理 5.8 $z = a$ が (5.4) の正則点であるとき, 任意の定数 $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ に対し, $z = a$ で正則な (5.4) の解 $f(z)$ で初期条件 $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(a) = c_{n-1}$ を満たすものが唯一つ存在する. よってこのとき, $z = a$ で正則な (5.4) の解全体は $\mathbb{C}^n$ と同型な複素ベクトル空間となる:

$$\begin{array}{rcl} \{z = a \text{ で正則な (5.4) の解}\} & \simeq & \mathbb{C}^n \\ f(z) & \mapsto & (f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)). \end{array}$$

[証明の方針] 各 $p_i(z)/p_0(z)$ $(i=1,\ldots,n)$ の $z=a$ におけるテイラー級数展開を

$$\frac{p_i(z)}{p_0(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(z-a)^j \qquad (i=1,\ldots,n)$$

と書く. まず, 形式的なべき級数

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-a)^j$$

で, 初期条件を満たす (5.4) の解を求める.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} jb_j(z-a)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)b_{j+1}(z-a)^j, \\
f''(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)b_{j+1}(z-a)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)b_{j+2}(z-a)^j, \\
&\vdots \\
f^{(n-1)}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n-1)!}{j!} b_{j+n-1}(z-a)^j, \\
f^{(n)}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j!} b_{j+n}(z-a)^j
\end{aligned}$$

より, $f(z)$ が初期条件を満たすためには,

$$c_0 = f(a) = b_0,\ c_1 = f'(a) = b_1,\ c_2 = f''(a) = 2b_2,\ \cdots,\ c_{n-1} = f^{(n-1)}(a) = (n-1)!b_{n-1}$$

でなければならないので, まず $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ は初期条件から唯一つに決定してしまう. さらに,

$$\begin{aligned}
0 &= f^{(n)}(z) + \frac{p_1(z)}{p_0(z)} f^{(n-1)}(z) + \cdots + \frac{p_n(z)}{p_0(z)} f(z) \\
&= \{n!b_n + (n-1)!p_{10}b_{n-1} + \cdots + p_{n0}b_0\} \\
&\quad + \{(n+1)!b_{n+1} + n!p_{10}b_n + (n-1)!(p_{11}+p_{20})b_{n-1} + \cdots + p_{n1}b_0\}(z-a) \\
&\quad + \left\{\frac{(n+2)!}{2} b_{n+2} + (b_{n+1}, b_n, \ldots, b_0 \text{ の一次結合})\right\}(z-a)^2 \\
&\quad + \left\{\frac{(n+3)!}{3!} b_{n+3} + (b_{n+2}, b_{n+1}, \ldots, b_0 \text{ の一次結合})\right\}(z-a)^3 \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

で, このべき級数の各項の係数が 0 にならなければならないので, $b_n, b_{n+1}, \ldots$ も下から唯一つに決定していく.

従って, 形式的なべき級数としては, 初期条件を満たす (5.4) の解が唯一つ定まる. そうして得られたべき級数が正の収束半径をもち, 実際に $z=a$ (のまわり) で正則な関数を表すことがいえれば証明が終わる. 詳しくは参考文献 [2] などの, 複素領域における線形常微分方程式について書かれている本を参考にしてほしい. $\square$

定理 5.9 複素平面内の領域 $U \subset \mathbb{C}$ について, U のすべての点が (5.4) の正則点であるとする.

(1) 任意の $a, b \in U$ に対し, a と b を結ぶ U 内の連続曲線 L があれば, $z=a$ で正則な (5.4) の任意の解を L に沿って b まで解析接続していくことが可能で, また, 解析接続した先の関数は $z=b$ で正則な (5.4) の解である. ただし, U が単連結でない場合は, 解析接続した先の関数は経路 L に依存する.

(2) U が単連結である場合は, 解析接続した先の関数は元の関数にのみ依存し, 経路 L にはよらない. 従ってこの場合, U で正則な (5.4) の解全体はやはり $\mathbb{C}^n$ と同型な複素ベクトル空間となる.

5.2.2 モノドロミー表現

定理 5.9 において, ある $a \in U$ をとり, $z=a$ で正則な (5.4) の解全体のなす n 次元複素ベクトル空間を V_a と書く. L を a を始点かつ終点とする U 内の連続閉曲線とする (以下, これを簡単に「a を基点とする U 内の閉曲線」と呼ぶことにする). ある $f \in V_a$ を L に沿って解析接続していった先の関数を $\rho_L(f)$ と書くと, これも $z=a$ で正則な (5.4) の解なので $\rho_L(f) \in V_a$ となる. U が単連結の場合は $\rho_L(f)$ は f と一致するが, 単連結でない場合は L に依存し, 一致しないかもしれない (多価関数になるかもしれない). このようにして写像 $\rho_L : V_a \to V_a$ を考えることができ, さらにこれが線形写像になることが容易にいえる. また $\rho_L(f) = 0$ (V_a の零元, つまり零関数) のときは $f=0$ でなければならないから ρ_L は単射であり, V_a は有限次元なので, 全射でもある. 従って, ρ_L は V_a から自分自身への線形同型写像である. ここで, V_a から自分自身への線形同型写像全体が写像の合成に関してなす群を $\mathrm{GL}(V_a)$ と書くことにすれば, $\rho_L \in \mathrm{GL}(V_a)$ である.

a を基点とする U 内の閉曲線全体を $C(U,a)$ と書くことにしよう. $L_0, L_1 \in C(U,a)$ について, L_0 を基点 (始点と終点) を固定しつつ U 内で連続的に変形していって L_1 にすることができるとき, L_0 と L_1 は**基点を保ってホモトープ**であるといい, $L_0 \sim L_1$ と書く. 解析接続の性質により,

$$L_0 \sim L_1 \Rightarrow \rho_{L_0} = \rho_{L_1}$$

である. $C(U,a)$ を同値関係 $\sim$ で割った同値類全体を $\pi_1(U,a) = C(U,a)/\sim$ と書く. $L \in C(U,a)$ の属する同値類を $[L] \in \pi_1(U,a)$ と書くことにすると, 上記より, 写像

$$\rho : \pi_1(U,a) \to \mathrm{GL}(V_a), \quad [L] \mapsto \rho_L$$

は well-defined である．また, $L_1, L_2 \in C(U,a)$ に対し, L_1 の終点を L_2 の始点につないで得られる閉曲線を $L_2 \cdot L_1$ と書くことにする．定義により明らかに

$$\rho_{L_2 \cdot L_1} = \rho_{L_2} \circ \rho_{L_1}$$

である．さらに $[L_1], [L_2] \in \pi_1(U,a)$ に対し, 両者の積を

$$[L_2] \cdot [L_1] = [L_2 \cdot L_1]$$

により定めると, $\pi_1(U,a)$ はこの積に関して群をなす．単位元は, 連続的に変形すると 1 点 a に縮めることができる閉曲線が属する同値類で, $[L] \in \pi_1(U,a)$ の逆元は, L を逆回りにたどる閉曲線を L^{-1} と書くときの $[L^{-1}]$ である．この $\pi_1(U,a)$ を, a を基点とする U の**基本群**と呼ぶ．そして, 先ほど考えた写像 $\rho : \pi_1(U,a) \to \mathrm{GL}(V_a)$ は群準同型となる．この ρ を線形微分方程式 (5.4) の (a を基点とする) **モノドロミー表現**という．

V_a の基底 $f_1, \ldots, f_n$ を適当にとると群同型 $\mathrm{GL}(V_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ が得られるので, モノドロミー表現は $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ への群準同型

$$\pi_1(U,a) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$$

とみなすこともできる．その像は $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ の部分群となるが, これを (V_a の基底 $f_1, \ldots, f_n$ に関する) **モノドロミー群**と呼ぶ.

例 5.10 $\lambda \in \mathbb{C}$ とし, 微分方程式

$$(D - \lambda)f = zf' - \lambda f = 0$$

を考える．$-\lambda/z$ は $z = 0$ 以外では正則なので, $U = \mathbb{C} - \{0\}$ とすれば U のすべての点がこの微分方程式の正則点となる．$a \in U$ とすると, $z = a$ における正則関数解全体 V_a は 1 次元の複素ベクトル空間となる．$f(z) = z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ が一つの解なので, これを基底としてとることにしよう．ただし, $\log z$ は $0 \le \arg z < 2\pi$ なる分枝をとる (多価関数としての $\log z$ については第 3 章の 例 3.43 を参照).

a を始点とし, 原点 0 を左回りに 1 まわりしてまた a に戻る閉曲線を L_0 とする．すると $\pi_1(U,a)$ は $[L_0]$ で生成される:

$$\pi_1(U,a) = \{[L_0^n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

従って, ρ_{L_0} だけ分かれば, モノドロミー表現やモノドロミー群を記述することができる．L_0 をたどって $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ を解析接続すると, $\log z$ の部分が $\log z + 2\pi\sqrt{-1}$ となるので,

$$\rho_{L_0}(z^\lambda) = e^{\lambda(\log z + 2\pi\sqrt{-1})} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} z^\lambda$$

を得る. $\mathrm{GL}_1\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ に注意すると, モノドロミー表現は

$$\rho : [L_0^n] \mapsto e^{2n\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

と書け, モノドロミー群は $\mathbb{C}^\times$ の部分群として

$$\{e^{2n\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & (\lambda \text{ が有理数でないとき}) \\ \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} & (\lambda \text{ が有理数のとき, } q \text{ は } q\lambda \text{ が整数となる最小の自然数}) \end{cases}$$

となる.

例 5.11 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ とし, 微分方程式

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)f = z^2 f'' - (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)zf' + \lambda_1\lambda_2 f = 0$$

を考える. $-(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)/z$ および $\lambda_1\lambda_2/z^2$ は $z = 0$ 以外では正則なので, 上の例と同様 $U = \mathbb{C} - \{0\}$ とすれば U のすべての点がこの微分方程式の正則点となる. また, $a \in U$ に対し, $z = a$ における正則関数解全体 V_a は 2 次元の複素ベクトル空間となる. L_0 を上の例と同様に, a を始点とし, 原点 0 を左回りに 1 まわりしてまた a に戻る閉曲線とする. 以下, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合と $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合に分けて, モノドロミー表現を調べてみよう.

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **の場合**. この場合は V_a の基底として $z^{\lambda_1}, z^{\lambda_2}$ がとれる. この基底に関して群同型 $\mathrm{GL}(V_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ をとれば, $\rho_{L_0}(z^{\lambda_i}) = e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda_i} z^{\lambda_i}$ $(i = 1, 2)$ より, モノドロミー表現は

$$\rho : [L_0^n] \mapsto \begin{pmatrix} e^{2n\pi\sqrt{-1}\,\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{2n\pi\sqrt{-1}\,\lambda_2} \end{pmatrix}$$

となる. モノドロミー群は λ_1, λ_2 のどちらかが有理数でなければ $\mathbb{Z}$ と同型な無限群, 両方とも有理数ならば $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (q は $q\lambda_1$ かつ $q\lambda_2$ が整数となる最小の自然数) と同型な有限群となる.

(2) $\lambda_1 = \lambda_2$ **の場合**. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ とおく. この場合は V_a の基底として, z^λ と $z^\lambda \log z$ がとれる[1]. $\rho_{L_0}(z^\lambda) = e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} z^\lambda$, $\rho_{L_0}(z^\lambda \log z) = e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} z^\lambda(\log z + 2\pi\sqrt{-1})$ より,

$$(\rho_{L_0}(z^\lambda), \rho_{L_0}(z^\lambda \log z)) = (z^\lambda, z^\lambda \log z) \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} & 2\pi\sqrt{-1}\,e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \end{pmatrix}$$

である. ここで, 基底を取り直して, $2\pi\sqrt{-1}\,z^\lambda$ と $z^\lambda \log z$ をとれば,

$$(\rho_{L_0}(2\pi\sqrt{-1}\,z^\lambda), \rho_{L_0}(z^\lambda \log z)) = (2\pi\sqrt{-1}\,z^\lambda, z^\lambda \log z) \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} & e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \end{pmatrix}$$

となるので, この基底に関して群同型 $\mathrm{GL}(V_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ をとれば, モノドロミー表現は

$$\rho : [L_0^n] \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} & e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \end{pmatrix}^n = e^{2n\pi\sqrt{-1}\,\lambda} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. そしてモノドロミー群は $\mathbb{Z}$ と同型な無限群となる.

[1] $(D - \lambda)(z^\lambda \log z) = z^\lambda$ より $(D - \lambda)^2(z^\lambda \log z) = 0$ だから, $z^\lambda \log z$ も解となる.

5.2.3　確定特異点

$a \in \mathbb{C}$ に対し, $z=a$ におけるオイラー作用素 D_a を

$$D_a = (z-a)\frac{d}{dz}$$

により定める.

定義 5.12 $z=a$ が (5.4) の特異点であるとする. もし, 次の同値な条件 (1), (2) が満たされるなら, $z=a$ は (5.4) の**確定特異点**であるという. 確定特異点でない場合は**不確定特異点**と呼ばれる.

(1) $z=a$ で正則な関数を左からかけたり割ったりすることにより, (5.4) を

$$(D_a^n + q_1(z)D_a^{n-1} + \cdots + q_n(z))f = 0 \tag{5.5}$$

($q_1(z), \ldots, q_n(z)$ は $z=a$ で正則な関数) という形に書き換えることができる.

(2) n 個の関数

$$(z-a)\frac{p_1(z)}{p_0(z)}, \quad \ldots, \quad (z-a)^{n-1}\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}, \quad (z-a)^n\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

がすべて $z=a$ で正則である.

演習 5.13 上記の条件 (1), (2) が同値であることを示せ.

また, 微分方程式 (5.4) を無限遠点 $z=\infty$ においても考える. それには $w=1/z$ とおいて $w=0$ で考えればよい.

$$z = \frac{1}{w}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{dw}{dz}\frac{d}{dw} = -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dw} = -w^2\frac{d}{dw}$$

に注意して (5.4) を書き換えた微分方程式が $w=0$ を確定特異点としてもつとき, $z=\infty$ は (5.4) の確定特異点であるという. 正則点や不確定特異点になる場合についても同様に定義される.

定義 5.14 リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ における (5.4) の特異点がすべて確定特異点であるとき, 微分方程式 (5.4) は**確定特異点型**または**フックス型**であるという.

例 5.15 (ガウスの超幾何微分方程式) ここで改めてガウスの超幾何微分方程式 (5.3) を考えてみよう. 全体を $z(1-z)$ で割ると,

$$f'' + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}f' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}f = 0$$

となるので, $z=0,1$ は確定特異点, $\mathbb{C}-\{0,1\}$ の任意の点は正則点になることが容易に分かる.

次に, $w=1/z$ とおいて,

$$z=\frac{1}{w},\quad \frac{d}{dz}=-w^2\frac{d}{dw},\quad \frac{d^2}{dz^2}=w^4\frac{d^2}{dw^2}+2w^3\frac{d}{dw}$$

に注意して (5.3) を書き換えると,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{w}\left(1-\frac{1}{w}\right)\left(w^4\frac{d^2}{dw^2}+2w^3\frac{d}{dw}\right)+\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta+1}{w}\right)\left(-w^2\frac{d}{dw}\right)-\alpha\beta\right\}f\\ =\ &\left\{w^2(w-1)\frac{d^2}{dw^2}+((\alpha+\beta-1)+(2-\gamma)w)w\frac{d}{dw}-\alpha\beta\right\}f=0\end{aligned}$$

となり, 両辺を $w^2(w-1)$ で割ると,

$$\left\{\frac{d^2}{dw^2}+\frac{(\alpha+\beta-1)+(2-\gamma)w}{w(w-1)}\frac{d}{dw}-\frac{\alpha\beta}{w^2(w-1)}\right\}f=0$$

となる. この微分方程式は $w=0$ を確定特異点としてもつので, $z=\infty$ も (5.3) の確定特異点となる.

従って, リーマン球面における (5.3) の特異点は $z=0,1,\infty$ で, これらはすべて確定特異点なので, ガウスの超幾何微分方程式 (5.3) は確定特異点型であることがいえた.

5.2.4 確定特異点における解の構成

$z=a$ が微分方程式 (5.4) の確定特異点で, 方程式が (5.5) の形に書き換えられたとする. このとき, ある $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し, 方程式 (5.5) が

$$(z-a)^\lambda\sum_{j=0}^{\infty}b_j(z-a)^j\qquad(b_j\in\mathbb{C})\tag{5.6}$$

という形の解をもつかどうかを考える. ただし, $(z-a)^\lambda=e^{\lambda\log(z-a)}$ で, $\log(z-a)$ は $0\le\arg(z-a)<2\pi$ なる分枝をとるものとする.

定理 5.8 のときと似たように考えて, (5.6) が解になるように下から $b_0,b_1,\ldots$ を決定していくことを考える. $D_a(z-a)^{\lambda+j}=(\lambda+j)(z-a)^{\lambda+j}$ と, それから, (5.5) の各 $q_i(z)$ を $z=a$ においてテイラー級数展開したときの定数項が $q_i(a)$ であることに注

意すると,

$$
\begin{aligned}
& (D_a^n + q_1(z) D_a^{n-1} + \cdots + q_n(z)) \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-a)^{\lambda+j} \\
= \ & (\lambda^n + q_1(a)\lambda^{n-1} + \cdots + q_n(a)) b_0 (z-a)^{\lambda} \\
& + \{((\lambda+1)^n + q_1(a)(\lambda+1)^{n-1} + \cdots + q_n(a)) b_1 + (\text{定数}) b_0\} (z-a)^{\lambda+1} \\
& + \{((\lambda+2)^n + q_1(a)(\lambda+2)^{n-1} + \cdots + q_n(a)) b_2 + (b_1, b_0 \text{ の線形結合})\} (z-a)^{\lambda+2} \\
& + \{((\lambda+3)^n + q_1(a)(\lambda+3)^{n-1} + \cdots + q_n(a)) b_3 + (b_2, b_1, b_0 \text{ の線形結合})\} (z-a)^{\lambda+3} \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $b_0 = 1$ とする. まず $(z-a)^{\lambda}$ の項を考えると, (5.6) が解であるためには, λ が

$$\lambda^n + q_1(a)\lambda^{n-1} + \cdots + q_n(a) = 0 \tag{5.7}$$

を満たさなければならない.

定義 5.16 λ についての n 次方程式 (5.7) を, 微分方程式 (5.5) の (または (5.4) の) 確定特異点 $z = a$ における**決定方程式** とよび, その解を**特性指数**と呼ぶ.

λ が特性指数で, さらに $\lambda + j$ $(j = 1, 2, 3, \dots)$ がどれも決定方程式の解でなければ, 先ほどの式の各 $(z-a)^{\lambda+j}$ $(j = 1, 2, 3, \dots)$ の項の係数が 0 になるように $b_1, b_2, \dots$ を定めていくことで (5.6) が解になるようにできる. また実は, このようにして得られた (5.6) のべき級数の部分 $\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-a)^j$ が正の収束半径をもち, $z = a$ で正則な関数を定めることがいえる.

定理 5.17 $z = a$ が微分方程式 (5.4) の確定特異点で, 方程式が (5.5) の形に書き換えられたとする. さらに, 決定方程式 (5.7) が n 個の互いに異なる解 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ をもち, それらのどの 2 つの差も整数でないと仮定する:

$$i \neq j \ \Rightarrow \lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}. \tag{5.8}$$

このとき, $z = a$ の近く (のある正則点) において正則な (5.4) の解全体のなすベクトル空間の基底として,

$$(z-a)^{\lambda_1} u_1(z), \ \dots, \ (z-a)^{\lambda_n} u_n(z)$$

$(u_1(z), \dots, u_n(z)$ は $z = a$ で正則, $u_i(a) = 1$ $(i = 1, \dots, n))$ という形のものがとれる.

注意 5.18 非整数条件 (5.8) が成立しない場合は, 例 5.11 (2) のように, $\log(z-a)$ を使って基底を構成する. 本稿では話を簡単にするため, (5.8) が成立する場合のみを考えることにする.

5.3 超幾何微分方程式の解空間

例 5.15 で, リーマン球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ におけるガウスの超幾何微分方程式 (5.3) の確定特異点は $z = 0, 1, \infty$ の 3 点であることをみた. そこで, それぞれの確定特異点の近くにおける解空間の基底 (定理 5.17 の形のもの) として何が得られるかを調べてみることにしよう.

5.3.1 $z = 0$ における解空間

(5.2) より, (5.3) は

$$\begin{aligned} & \{(D+\gamma-1)D - z(D+\alpha)(D+\beta)\}f \\ = \ & \{(1-z)D^2 + ((\gamma-1)-(\alpha+\beta)z)D - \alpha\beta z\}f \ = \ 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

と書き換えられ, 両辺を $1-z$ で割ると (5.5) の形になる. 従って $z = 0$ における決定方程式は

$$(\lambda+\gamma-1)\lambda = 0$$

で, 特性指数は $\lambda = 0, 1-\gamma$ となる.

そこで, 非整数条件として $1-\gamma \notin \mathbb{Z}$, 言い換えると

$$\gamma \notin \mathbb{Z}$$

を仮定した上で, $z = 0$ の近くにおける解空間の基底として

$$u_1(z), \ z^{1-\gamma}u_2(z)$$

$(u_1(z), u_2(z)$ は $z = 0$ で正則, $u_1(0) = u_2(0) = 1)$ という形のものを求めよう.

まず, $u_1(z)$ はガウスの超幾何級数に他ならない:

$$u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z).$$

次に $u_2(z)$ を求める. 一般に,

$$D(z^{1-\gamma}f(z)) = z^{1-\gamma}(D+1-\gamma)f(z)$$

となることに注意すれば, $u_2(z)$ が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} & \{(D+\gamma-1)D - z(D+\alpha)(D+\beta)\}(z^{1-\gamma}u_2(z)) \\ = \ & z^{1-\gamma}\{D(D+1-\gamma) - z(D+1-\gamma+\alpha)(D+1-\gamma+\beta)\}u_2(z) \ = \ 0 \end{aligned}$$

となる. 上式は微分方程式 (5.9) の α, β, γ をそれぞれ $\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma$ に置き換えた方程式を $u_2(z)$ が満たすことを意味するので,

$$u_2(z) = F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z)$$

を得る.

命題 5.19 非整数条件 $\gamma \notin \mathbb{Z}$ を仮定すると, 微分方程式 (5.3) の確定特異点 $z=0$ の近くにおける解空間の基底として

$$f_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z), \quad f_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)$$

がとれる.

5.3.2 $z = 1$ における解空間

$z=1$ におけるオイラー作用素 $D_1 = (z-1)d/dz$ を用いると, 微分方程式 (5.3) は

$$\begin{aligned} & \{zD_1^2 - (\gamma - (\alpha+\beta)z)D_1 - \alpha\beta(1-z)\}f \\ = \ & \{D_1(D_1 + \alpha + \beta - \gamma) - (1-z)(D_1+\alpha)(D_1+\beta)\}f \ = \ 0 \end{aligned} \qquad (5.10)$$

と書き換えられ, 両辺を z で割ると (5.5) の形になる. 従って $z=1$ における決定方程式は

$$\lambda(\lambda + \alpha + \beta - \gamma) = 0$$

で, 特性指数は $\lambda = 0, \gamma - \alpha - \beta$ となる.

そこで, 非整数条件として

$$\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$$

を仮定した上で, $z=1$ の近くにおける解空間の基底として

$$v_1(z), \ (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} v_2(z)$$

($v_1(z), v_2(z)$ は $z=1$ で正則, $v_1(1) = v_2(1) = 1$) という形のものを求めよう[2].

まず, (5.10) は (5.9) の γ を $\alpha+\beta-\gamma+1$ に, z を $1-z$ に置き換えた方程式になっているので[3], $v_1(z)$ はガウスの超幾何級数を使って次のように書ける:

$$v_1(z) = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z).$$

また, $v_2(z)$ が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} & \{D_1(D_1+\alpha+\beta-\gamma) - (1-z)(D_1+\alpha)(D_1+\beta)\}((1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}v_2(z)) \\ = \ & (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\{(D_1+\gamma-\alpha-\beta)D_1 - (1-z)(D_1+\gamma-\beta)(D_1+\gamma-\alpha)\}v_2(z) \ = \ 0 \end{aligned}$$

となる. 上式は微分方程式 (5.10) の α, β をそれぞれ $\gamma-\alpha, \gamma-\beta$ に置き換えた方程式を $v_2(z)$ が満たすことを意味するので,

$$v_2(z) = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z)$$

を得る.

[2]前節の一般論でいうと $(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}$ とするところがここでは $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ になっているのは慣習による.

[3]z を $1-z$ に置き換えると d/dz は $-d/dz$ に置き換わるので, $D = zd/dz$ は $-(1-z)d/dz = (z-1)d/dz = D_1$ に置き換わる.

命題 5.20 非整数条件 $\gamma-\alpha-\beta \notin \mathbb{Z}$ を仮定すると, 微分方程式 (5.3) の確定特異点 $z=1$ の近くにおける解空間の基底として

$$g_1(z)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z),\ \ g_2(z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)$$

がとれる.

5.3.3 $z=\infty$ における解空間

例 5.15 で $w=1/z$ とおいて (5.3) を書き換えた微分方程式は, オイラー作用素 $D_w=wd/dw$ を用いてさらに

$$\begin{aligned} &\{(1-w)D_w^2-((\alpha+\beta)-(\gamma-1)w)D_w+\alpha\beta\}f \\ =\ &\{(D_w-\alpha)(D_w-\beta)-w(D_w-\gamma+1)D_w\}f\ =\ 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

と書き換えられ, 両辺を $1-w$ で割ると (5.5) の形になる. 従って $w=0$ ($z=\infty$) における決定方程式は

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)=0$$

で, 特性指数は $\lambda=\alpha,\beta$ となる.

そこで, 非整数条件として

$$\alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$$

を仮定した上で, $w=0$ の近くにおける解空間の基底として

$$w^\alpha y_1(w),\ w^\beta y_2(w)$$

($y_1(w),y_2(w)$ は $w=0$ で正則, $y_1(0)=y_2(0)=1$) という形のものを求めよう.

$y_1(w)$ が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} &\{(D_w-\alpha)(D_w-\beta)-w(D_w-\gamma+1)D_w\}(w^\alpha y_1(w)) \\ =\ &w^\alpha\{D_w(D_w+\alpha-\beta)-w(D_w+\alpha-\gamma+1)(D_w+\alpha)\}y_1(w)\ =\ 0 \end{aligned}$$

となる. 上式は微分方程式 (5.9) の β,γ をそれぞれ $\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1$ に置き換え, z を $w=1/z$ に置き換えた方程式を $y_1(w)$ が満たすことを意味するので,

$$y_1(w)=F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;w)$$

を得る.

また, $y_2(w)$ については上の議論で α と β を入れ替えればいいので,

$$y_2(w)=F(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1;w)$$

を得る.

命題 5.21 非整数条件 $\alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$ を仮定すると, 微分方程式 (5.3) の確定特異点 $z=\infty$ の近くにおける解空間の基底として

$$h_1(z)=z^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;1/z),\quad h_2(z)=z^{-\beta}F(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1;1/z)$$

がとれる.

演習 5.22 (1) $w_1=\dfrac{1}{1-z}$ とおくとき, z, $\dfrac{d}{dz}$, $\dfrac{d^2}{dz^2}$ を w_1 と $\dfrac{d}{dw_1}$ を使って表せ.

(2) ガウスの超幾何微分方程式 (5.3) を w_1 と $\dfrac{d}{dw_1}$ を使って書き換えた微分方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた微分方程式が $w_1=0$ を確定特異点にもつことを示し, さらにそこにおける決定方程式とその解 (特性指数) を求めよ.

(4) (3) で求めた特性指数を λ_1,λ_2 とおく. 非整数条件 $\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$ が成立しているとき, (2) の微分方程式の $w_1=0$ の近くにおける解空間の基底として

$$w_1^{\lambda_1}\varphi_1(w_1),\quad w_1^{\lambda_2}\varphi_2(w_1)$$

($\varphi_1(w_1),\varphi_2(w_1)$ は $w_1=0$ で正則, $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=1$) という形のものがとれる. この $\varphi_1(w_1),\varphi_2(w_1)$ をガウスの超幾何級数を用いて具体的に求めよ.

5.3.4 モノドロミーと接続行列

ここまでで, ガウスの超幾何関数の特異点 (分岐点) と, 各特異点における局所的なふるまいは分かるようになったので, 今度は複素平面全体 (あるいはリーマン球面全体) における大域的なふるまいがどうなるのかを調べていきたい.

前小節までの 3 つの命題における非整数条件は全て満たされているものとする. 命題 5.19 の $f_1(z),f_2(z)$ は (べき級数部分の収束半径が 1 なので) 複素平面内の領域 $\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\}$ で (多価正則関数として) 意味をもつ. また, 命題 5.20 の $g_1(z),g_2(z)$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-1|<1\}$ で意味をもつ. そこで, この両方に含まれる点 $z=1/2$ を基点としてモノドロミーを考えてみることにする. まず, $z=1/2$ において正則な (5.3) の解のなす空間を $V_{1/2}$ と書くと, いま述べたことから, $\{f_1,f_2\}$ と $\{g_1,g_2\}$ はいずれも $V_{1/2}$ の基底となる. 従って, ある行列 $C_{fg}\in\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ が存在して

$$(f_1,f_2)=(g_1,g_2)C_{fg}$$

と書けるはずである. このような行列 C_{fg} を**接続行列**と呼び, その成分を**接続係数**という.

$z=1/2$ を基点として, 原点 $0\in\mathbb{C}$ を左回りに 1 周して戻る閉曲線を L_0 とし, $1\in\mathbb{C}$ を左回りに 1 周して戻る閉曲線を L_1 とおく. L_0 に沿って f_1, f_2 を解析接続すると, f_1 は変わらず, f_2 は $z^{1-\gamma}=e^{(1-\gamma)\log z}$ の $\log z$ の部分が $\log z+2\pi\sqrt{-1}$ に変わるので,

$$(\rho_{L_0}(f_1),\rho_{L_0}(f_2))=(f_1,f_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi\sqrt{-1}\,\gamma}\end{pmatrix}$$

となる. また同様に, L_1 に沿って g_1, g_2 を解析接続すると,

$$(\rho_{L_1}(g_1),\rho_{L_1}(g_2))=(g_1,g_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}$$

となる. L_1 に沿って f_1, f_2 を解析接続するとどうなるかは, 接続行列 C_{fg} と今の式を使って

$$\begin{aligned}(\rho_{L_1}(f_1),\rho_{L_1}(f_2)) &= (\rho_{L_1}(g_1),\rho_{L_1}(g_2))C_{fg}\\ &= (g_1,g_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}C_{fg}\\ &= (f_1,f_2)C_{fg}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}C_{fg}\end{aligned}$$

と記述できる.

$z=1/2$ を基点とする $\mathbb{C}-\{0,1\}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{C}-\{0,1\},1/2)$ は $[L_0],[L_1]$ で生成されるので, 以上より, $V_{1/2}$ の基底 $\{f_1,f_2\}$ に関するモノドロミー群は 2 つの行列

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi\sqrt{-1}\,\gamma}\end{pmatrix},\quad C_{fg}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi\sqrt{-1}(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}C_{fg}$$

で生成される. そこで, あとは接続行列 C_{fg} を具体的に求めることができれば, モノドロミー群が記述できたことになる. 接続行列を求めることを**接続問題**という.

それから, $|z|<1$ や $|z-1|<1$ なる範囲の外側での超幾何関数の挙動をみるには, 無限遠点 ∞ における解に対して接続問題を考えるとよい. 命題 5.21 の $h_1(z), h_2(z)$ は領域 $\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|\}$ で意味をもつ多価正則関数である. この領域の任意の点 b に対し, $1/2$ から b へと至る適当な連続曲線をとり L_b と書く. f_1, f_2 を L_b に沿って解析接続した先の関数を $\rho_{L_b}(f_1),\rho_{L_b}(f_2)$ と書くと, これらは b における解空間の (h_1, h_2 とは別の) 基底となるので, ある $C_{fh}\in\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ があって

$$(\rho_{L_b}(f_1),\rho_{L_b}(f_2))=(h_1,h_2)C_{fh}$$

と書けるはずである. この接続行列 C_{fh} が分かれば, f_1, f_2 を収束円 $|z|<1$ の外側へ解析接続していったときのふるまいが記述できたことになる.

次節では超幾何関数の積分表示を使ってこれらの接続問題を解いていくことにする.

(つづく)

参考文献

[1] 小松勇作「特殊函数」近代数学講座 9, 朝倉書店.

[2] 高野恭一「常微分方程式」新数学講座 6, 朝倉書店.

[3] 原岡喜重「超幾何関数」すうがくの風景 7, 朝倉書店.