2009 年度 代数学概論 II

Hopf 代数とは

天野勝利

(2009 年 11 月 2 日〜2010 年 1 月 19 日分の講義ノート)

0　参考文献

・ M. Sweedler, “Hopf algebras”, Benjamin, New York, 1969.
・ E. Abe, “Hopf algebras”, Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge University Press, 1980; paperback edition, 2004.

※この講義 (の天野担当分) のホームページを作りました:
http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2009-3/s-algebraII/index.html
本稿を含む参考資料をここからダウンロードできるようにしておきます. 特に, 2002 年度に竹内先生の講義を聞いた時の聴講ノートが残っているので, それを載せておく予定です (本稿ではこれを「聴講ノート 2002」と呼ぶことにします).

1　algebra と coalgebra

1.1　algebra の定義と coalgebra の定義

k を体とし, これを基礎体とする (以下すべて k 上で考える). A を単位元 1 を持つ環で, また同時に k 上のベクトル空間であるものとする. さらに積

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto ab$$

が双線形写像ならば, A を k-algebra (k-代数) という.

まず, この k-algebra の定義をテンソル積と線形写像のみを用いて書き直したい. 積 $A \times A \to A$ は双線形写像だから, 対応する $A \otimes A$ からの線形写像

$$m : A \otimes A \to A, \quad a \otimes b \mapsto ab$$

で置き換えて考えることができる. また, 単位元 1 は線形写像

$$u : k \to A, \quad \alpha \mapsto \alpha \cdot 1$$

に置き換えて考える. そして, 積の結合律や単位元の満たすべき条件を可換図式で表すことにより, k-algebra の定義を次のように言い換えることができる.

定義 1.1 ある k 上ベクトル空間 A と二つの線形写像 $m : A \otimes A \to A$ および $u : k \to A$ があって,

(1) 結合律 $((ab)c = a(bc))$. すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

(2) 単位律 $(1a = a = a1)$. すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
 & k \otimes A \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes k \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"'] & \\
\alpha \otimes a \arrow[drr, mapsto] & & A & & a \otimes \alpha \arrow[dll, mapsto] \\
 & & \alpha a \quad \alpha a & &
\end{tikzcd}$$

を満たすとき, (A, m, u) を k-algebra という.

今の定義を矢印の向きを逆にして考えてみることにより, **coalgebra** (**余代数**) という概念を定義することができる. (一般に, 「矢印の向きを反対にした」概念には 'co' をつけることが多い.)

定義 1.2 ベクトル空間 C と 2 つの線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$ と $\varepsilon : C \to k$ があって,

(1) 余結合律 (coassociative low). すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(2) 余単位律 (counitary property). 次も可換であること:

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, mapsto] & C \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\sim"] & c \arrow[dr, mapsto] & \\
1 \otimes c & k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & C \otimes k & c \otimes 1
\end{tikzcd}$$

を満たすとき, (C, Δ, ε) を k-coalgebra と呼ぶ. Δ は **comultiplication** (**余積**), ε は **counit** と呼ばれる.

例 1.3 S を集合とし, S の元全体を基底とするベクトル空間 $kS = \bigoplus_{s \in S} ks$ を考える. これに対し, comultiplication $\Delta : kS \to kS \otimes kS$ と counit $\varepsilon : kS \to k$ を $s \in S$ に対し

$$\Delta(s) = s \otimes s, \quad \varepsilon(s) = 1$$

となるように定めれば, kS は k-coalgebra となる. 実際, $s \in S$ に対し

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(s)) = \Delta(s) \otimes s = s \otimes s \otimes s = s \otimes \Delta(s) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(s)), \\
&(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(s)) = \varepsilon(s) \otimes s = 1 \otimes s = s = s \otimes 1 = s \otimes \varepsilon(s) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(s))
\end{aligned}$$

(ここで, $k \otimes S$ と S と $S \otimes k$ は同一視している) となるから, 定義 1.2 の図式 (1)(2) が可換であることが分かる.

例 1.4 $\{1, \partial\}$ を基底とするベクトル空間 $C = k \oplus k\partial$ を考えて, $\Delta : C \to C \otimes C$ と $\varepsilon : C \to k$ を

$$\begin{aligned}
&\Delta(\partial) = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial, && \varepsilon(\partial) = 0 \\
&\Delta(1) = 1 \otimes 1, && \varepsilon(1) = 1
\end{aligned}$$

となるように定めれば, C は k-coalgebra となる. 実際確かめてみると, 1 については上と同様で, ∂ については

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(\partial)) = \Delta(\partial) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes \partial = \partial \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \partial \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \partial \\
&= \partial \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(\partial) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(\partial)), \\
&(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(\partial)) = \varepsilon(\partial) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes \partial = 1 \otimes \partial = \partial \\
&= \partial \otimes 1 = \partial \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(\partial) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(\partial))
\end{aligned}$$

となって, OK.

例 1.5 $\{d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$ を基底とするベクトル空間 $B(k) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} kd_n$ を考えて, Δ と ε を

$$\Delta(d_n) = \sum_{i+j=n} d_i \otimes d_j, \quad \varepsilon(d_n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$$

となるように定めると, $B(k)$ は k-coalgebra になる. (確認作業は上記同様, 各 d_n について $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(d_n)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(d_n))$ となるかどうか等を調べれば良い.)

注意 1.6 Picard-Vessiot 理論との関係でいうと, 上記の 3 つの例は後でそれぞれ, 差分作用素, 微分作用素, higher derivation として考えることを想定している. 例えば $k[x]$ を多項式環, $s : k[x] \to k[x]$, $f(x) \mapsto f(x+1)$, $\partial = \dfrac{d}{dx}$ とするとき, $f, g \in k[x]$ について, 積 fg に対する s や ∂ の作用は

$$\begin{aligned}
&s(fg) = s(f)s(g), \\
&\partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g) \quad \text{(Leibniz rule)}
\end{aligned}$$

となるが, これらを例 1.3, 例 1.4 の $\Delta(s)$, $\Delta(\partial)$ と比較してほしい. また, ε のほうは, s, ∂ の定数に対する作用に対応している: すなわち $a \in k$ のとき,

$$
\begin{aligned}
s(a) &= a = \varepsilon(s)a, \\
\partial(a) &= 0 = \varepsilon(\partial)a.
\end{aligned}
$$

例 1.5 の $\{d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$ のような列を sequence of divided powers と呼ぶ (後日きちんと定義します). なぜそう呼ぶのかというと, k の標数が 0 のとき, d_n は $\dfrac{d}{dx}$ の冪 (power) を $n!$ で割った (divided) ものに対応するからである:

$$
d_n \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}
$$

(下記演習をやってみてください). 正標数の体上では通常の微分では Picard-Vessiot 理論にうまくいかない部分があるので, 代わりに higher derivation を用いるが, それに対応するのがこの divided powers である.

また, 例 1.5 の coalgebra を $B(k)$ と書くのは, これが Birkhoff-Witt coalgebra と呼ばれるタイプの coalgebra のうち最も簡単な例で, その頭文字をとっているから (これについても後日説明する予定です).

演習 1.7 k の標数を 0 とし, 多項式環 $k[x]$ において $d_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおくとき, 積 fg $(f, g \in k[x])$ に対する d_n の作用は

$$
d_n(fg) = \sum_{i+j=n} d_i(f)d_j(g)
$$

となることを確かめよ.

ここで, k-algebra の積の可換性を線形写像の図式で表現してみることにする.

定義 1.8 A を k-algebra とする. 次の図式が可換であるとき, A は **commutative (可換)** k-algebra という.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dl, "m"'] \\
A & \\
 & A \otimes A \arrow[ul, "m"] \arrow[uu, "\mathrm{tw}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで, tw は twist map $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ を表す.

この矢印の向きを逆にして, coalgebra の余可換性という概念を定義する.

定義 1.9 C を k-coalgebra とする. 次の図式が可換であるとき, C は **cocommutative** (**余可換**) k-coalgebra という.

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dd, "\mathrm{tw}"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\ & C \otimes C \end{tikzcd} .$$

例 1.3, 例 1.4, 例 1.5 でみてきた coalgebra はすべて cocommutative である.

1.2 Σ 記法 (sigma notation)

coalgebra の一般論を述べる時に問題となるのは, 余積 Δ をどのように記述するかということである. C を k-coalgebra とするとき, 一般には $c \in C$ について

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \quad (a_i, b_i \in C)$$

のように書けるわけだが, いちいち a_i, b_i という新しい記号を用意してこのように書くのは非常に面倒くさいし, 見通しも悪くなる. というわけで, これを単に

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$$

と書く. このような記号法を Σ 記法 (sigma notation) という. 例えばこの記法で余結合律を表してみると,

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \quad ({}^\forall c \in C)$$

となる. つまり, どこに Δ を施しても結局は同じものになるわけだが, これをさらに

$$= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

と書く. これで「c に二回 Δ を施したもの」を表す. さらにこれを繰り返して,

$$\begin{aligned} &\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 \otimes c_3 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \otimes c_3 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \Delta(c_3) \\ &= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \otimes c_4 \end{aligned}$$

などと書いていく.

この Σ 記法で余単位律を表してみると

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2) \quad ({}^\forall c \in C)$$

となる. また, coalgebra が cocommutative であるという性質を

$$\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1 \quad ({}^\forall c \in C)$$

と表すこともできる. 慣れると非常に便利な記号である.

なお, Sweedler の “Hopf algebras” では Σ の下に (c) をつけ, それから添え字の付け方もカッコをつけて

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

という風に書かれていた. 誤解の恐れがあるときにはこちらを用いた方が良いこともあるかもしれない.

演習 1.10 C を k-coalgebra, $f : C \to C$ を線形写像, $c \in C$ とする. 次を確かめよ.

(1) $\sum c_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon(c_i) \otimes \cdots \otimes c_{n+1} = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon(c_i)c_{i+1} \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$
$= \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{i-1}\varepsilon(c_i) \otimes \cdots \otimes c_{n+1} = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_n$.

(2) $\sum \varepsilon(c_2) \otimes f(c_1) = f(c)$.

(3) $\sum f(c_2) \otimes \varepsilon(c_1) = f(c)$.

(4) $\sum f(c_2) \otimes \Delta(c_1) = \sum f(c_3) \otimes c_1 \otimes c_2$.

(5) $\sum \Delta(c_2) \otimes f(c_1) = \sum c_2 \otimes c_3 \otimes f(c_1)$.

(6) $\sum f(c_1) \otimes \varepsilon(c_3) \otimes c_2 = \sum f(c_1) \otimes c_2$.

(7) $\sum c_1 \otimes f(c_3) \otimes \varepsilon(c_2) = \sum c_1 \otimes f(c_2)$.

(8) $\sum \varepsilon(c_1) \otimes f(c_3) \otimes c_2 = \sum f(c_2) \otimes c_1$.

(9) $\sum \varepsilon(c_1) \otimes \varepsilon(c_3) \otimes f(c_2) = f(c)$.

要領としては, Σ 記法中の c_i の部分に Δ をかけた場合, その部分は $c_i \otimes c_{i+1}$ となり, もともと $c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots$ だった部分があればそこは番号が一つ増えて $c_{i+2}, c_{i+3}, \ldots$ となる. また, $\varepsilon(c_i)$ は c_{i-1} または c_{i+1} の部分に繰り入れてしまうことができて, そのとき, もともと $c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots$ だった部分があればそこは番号が一つ減って $c_i, c_{i+1}, \ldots$ となる.

1.3 $*$-積と双対代数 (dual algebra)

C を k-coalgebra, A を k-algebra とし, $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ を C から A への k-linear map 全体の集合とする. このとき $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ の積 $*$ を

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) \quad (f, g \in \mathrm{Hom}_k(C, A), \quad c \in C)$$

により定義する. 写像の合成で書くならば,

$$f * g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

である. この積は結合律を満たす. また, $u \circ \varepsilon$ が $*$ に関する単位元となる. (各自確認してください.) よってこれにより $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ は k-algebra の構造をもつ.

演習 1.11 C が cocommutative, A が commutative ならば $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ は commutative であることを示せ.

特に C の双対空間 $C^* = \mathrm{Hom}_k(C, k)$ は $*$-積により k-algebra となる. これを C の双対代数 (dual algebra) という.

例 1.12 n^2 個の基底をもつベクトル空間 $C = \bigoplus_{i,j=1}^n kX_{ij}$ に対し, Δ と ε を

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{s=1}^n X_{is} \otimes X_{sj}, \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

により定めると, C は k-coalgebra になる. その双対代数 C^* は行列代数 $M_n(k)$ と同型である:

$$\begin{array}{ccc} C^* & \xrightarrow{\sim} & M_n(k) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(X_{ij}))_{i,j}. \end{array}$$

２学期のレポート課題. 例 1.5 の coalgebra $B(k)$ の双対代数 $B(k)^*$ は形式的ベキ級数環 $k[[X]]$ と同型であることを示せ.

注意 1.13 algebra と coalgebra の双対関係でいうと, ここで, k-algebra A の双対空間 A^* は双対余代数と呼ぶべきものになるのではないかという期待が生じるかもしれない. 実際, もし A が有限次元 k-algebra ならば, 積 m と単位射 u の双対写像 m^*, u^* を用いて A^* に k-coalgebra の構造が入る:

$$\begin{aligned} &\Delta : A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \ (\simeq A^* \otimes A^*), \quad f \mapsto [a \otimes b \mapsto f(ab)], \\ &\varepsilon : A^* \xrightarrow{u^*} k^* \simeq k, \quad f \mapsto f(1). \end{aligned}$$

例えば, 例 1.12 を逆からみれば, $M_n(k)$ の双対余代数は $C = \bigoplus_{i,j=1}^n kX_{ij}$ ということになる.

しかし, A が無限次元の場合は一般に $(A \otimes A)^*$ と $A^* \otimes A^*$ が同型にはならないので, A^* が coalgebra になるとは限らない. (そのような場合には finite dual と呼ばれる A^* の部分空間をとって双対余代数と考える (A° と書く) のですが, 興味のある人は Sweedler, “Hopf algebras” の Chapter VI などを参照してください.)

1.4 coalgebra の準同型 (coalgebra map)

algebra の世界の準同型は algebra map (環準同型かつ線形写像) であるが, これと双対的に, coalgebra の世界にも coalgebra map というものがある. 今までと同様, まず algebra map を可換図式で定義し直し, その矢印を逆向きにして coalgebra map を定義する.

定義 1.14 (1) A, B を k-algebra, $f : A \to B$ を線形写像とする. このとき次の図式が可換ならば, f を k-algebra map という.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A \otimes A \arrow[u, "m"] \arrow[r, "f\otimes f"] & B \otimes B \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} .$$

(2) C, D を k-coalgebra, $f : C \to D$ を線形写像とする. このとき次の図式が可換ならば, f を k**-coalgebra map** という.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd} .$$

Σ 記法で書けば, 線形写像 $f : C \to D$ が k-coalgebra map であるとは, ${}^\forall c \in C$ に対し

$$\begin{cases} \Delta(f(c)) &= \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \\ \varepsilon(f(c)) &= \varepsilon(c) \end{cases}$$

が成り立つことをいう.

すぐに分かることとしては, $f : C \to D$ が coalgebra map ならば, その双対写像 $f^* : D^* \to C^*$ は algebra map になる. 実際, 任意の $\varphi, \psi \in D^*$, $c \in C^*$ に対し,

$$f^*(\varphi * \psi)(c) = (\varphi * \psi)(f(c)) = \sum \varphi(f(c_1))\psi(f(c_2)) = f^*(\varphi) * f^*(\psi)$$

より $f^*(\varphi * \psi) = f^*(\varphi) * f^*(\psi)$ を得る. また, C^*, D^* の単位元は C, D の counit ε_C, ε_D であるが,

$$f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$$

であるから, f^* が単位元を保存することも分かる.

1.5 coalgebra の subquotient

algebra には subalgebra や, ideal とそれで割った quotient algebra などといった概念があるが, coalgebra にも subcoalgebra とか, coideal とそれで割った quotient coalgebra などの概念がある. まず準備として, 次は認める:

Fact[1]**.** V, W をベクトル空間, $V' \subset V$, $W' \subset W$ を部分空間とするとき, canonical な全射 $V \otimes W \twoheadrightarrow (V/V') \otimes (W/W')$ がとれるが, その kernel は $V' \otimes W + V \otimes W'$ である. 言い換えれば,

$$0 \to V' \otimes W + V \otimes W' \to V \otimes W \to (V/V') \otimes (W/W') \to 0$$

は exact sequence (完全列) である.

定義 1.15 C を k-coalgebra, $C \supset D, I$ を subspace とする.

(1) $\Delta(D) \subset D \otimes D$ のとき, D を C の **subcoalgebra** という. 実際このとき, $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ が k-coalgebra になる.

(2) $\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I$, $\varepsilon(I) = 0$ のとき, I を C の **coideal** という.

$C \supset I$ が coideal のとき, C/I は次のように k-coalgebra の構造をもつ. まず余積はどのように決めるのかというと, 次の可換図式:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta} & & & & \\
0 & \longrightarrow & I \otimes C + C \otimes I & \longrightarrow & C \otimes C & \longrightarrow & (C/I) \otimes (C/I) & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)}
\end{array}$$

において, $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \to (C/I) \otimes (C/I)$ が C/I を経由していることをみて, それを C/I の余積とすればよい. これにより $\bar{\Delta} : C/I \to (C/I) \otimes (C/I)$ が induce される. それから, 同様にして, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)}
\end{array}$$

から $\bar{\varepsilon} : C/I \to k$ が induce されて, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ が k-coalgebra になることがわかる. Σ 記法で書くなら, $\bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}$ はそれぞれ

$$\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_1 \otimes \bar{c}_2, \quad \bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$$

[1] この Fact の証明に, 以前 O. Zariski, P. Samel, “Commutative Algebra”, Vol. I を参照している記述を見た記憶があるので, 講義ではこの本を紹介しましたが, 後で探したら Chapter III, §14, Theorem 35 に環のテンソル積の場合に書いてありました. 一般のベクトル空間についても証明自体はそれほど難しくはないので演習問題として自力で証明してみてください. 分からなかったら, 「聴講ノート 2002」の 4 月 22 日分に当時自分でやったものが書いてあるので, 良かったらそちらも見てください.

となる．

さて, algebra map について環準同型定理が成立するように, coalgebra map についても準同型定理が成立する．$f : C \to D$ を coalgebra map とすると, ベクトル空間として $C/\operatorname{Ker} \simeq f(C)$ となるが, 実はこれが coalgebra としての同型にもなる．まず, $f(C)$ は D の subcoalgebra となる ($^\forall c \in C$ について, $\Delta(f(c)) = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \in f(C) \otimes f(C)$)．また, $\operatorname{Ker} f$ は C の coideal となる．実際, 次の可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} f & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & f(C) & \longrightarrow 0 & \text{(exact)} \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\
0 & \longrightarrow & \begin{array}{c}(\operatorname{Ker} f) \otimes C \\ + C \otimes (\operatorname{Ker} f)\end{array} & \longrightarrow & C \otimes C & \xrightarrow[f \otimes f]{} & f(C) \otimes f(C) & \longrightarrow 0 & \text{(exact)}
\end{array}
$$

を考えると, $\operatorname{Ker} f \hookrightarrow C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes f} f(C) \otimes f(C)$ で $\operatorname{Ker} f$ の元はすべて 0 にいくので, $\Delta(\operatorname{Ker} f) \subset (\operatorname{Ker} f) \otimes C + C \otimes (\operatorname{Ker} f)$ を得る．以上より, $C/\operatorname{Ker} f$ と $f(C)$ はともに k-coalgebra の構造をもつ．そして f から induce される線形同型写像

$$C/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} f(C)$$

が coalgebra map であることも明らかである．

1.6 module と comodule

A を k-algebra とする．M を左 A-module とすると, M は自動的に k-ベクトル空間となる．また, 分配律は A の作用

$$A \times M \to M$$

が双線形になる, ということを意味している．そこで, A の作用を線形写像 $A \otimes M \to M$ で表せば, A-module の定義の結合律, 単位律を線形写像の可換図式で書き直すことができる．

定義 1.16 A を k-algebra, M を k-ベクトル空間とする．ある線形写像

$$
\begin{array}{rcl}
\psi : A \otimes M & \to & M \\
a \otimes m & \mapsto & am
\end{array}
$$

があって, 次の図式が可換であるとき, (M, ψ) を**左 A-module** という．

$$
\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \psi} & A \otimes M \\
{\scriptstyle m \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\
A \otimes M & \xrightarrow{\psi} & M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
k \otimes M & \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} & A \otimes M \\
 & {\scriptstyle \sim}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \psi} & \\
 & M &
\end{array}
$$

これの矢印を逆にすることにより, comodule の概念が得られる.

定義 1.17 C を k-coalgebra, V を k-ベクトル空間とする. ある線形写像

$$\rho : V \to V \otimes C$$

があって, 次の図式が可換であるとき, (V, ρ) を**右** C**-comodule** という.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes C \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho\otimes\mathrm{id}} \\ V \otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} & V \otimes C \otimes C \end{array} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & & V \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\ & V \otimes k & \end{tikzcd}$$

なお, C が右からのテンソルではなく左からのテンソルだった場合には**左** C**-comodule** と呼ぶ.

例 1.18 $C = \bigoplus_{i,j=1}^{n} kX_{ij}$ を例 1.12 の coalgebra とし, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} kx_i$ を $x_1, \cdots, x_n$ を基底とする n 次元のベクトル空間とする. このとき

$$\rho(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes X_{ij} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

により ρ を定めれば, (V, ρ) は右 C-comodule である. 実際,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \Delta(X_{ij}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{s=1}^{n} X_{is} \otimes X_{sj}) \\ &= \sum_{i,s=1}^{n} x_i \otimes X_{is} \otimes X_{sj}, \\ \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \otimes X_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{s=1}^{n} x_s \otimes X_{si}) \otimes X_{ij} \quad (\leftarrow \text{ここで } i, s \text{ を入れ換える}) \\ &= \sum_{i,s=1}^{n} x_i \otimes X_{is} \otimes X_{sj} \end{aligned}$$

となって余結合律がいえるし,

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\rho(x_j)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varepsilon(X_{ij}) = x_j \otimes 1$$

となるので, ε との可換性も O.K.

coalgebra の余積と同様, comodule 構造 ρ に関しても Σ 記法がある. (V,ρ) を右 C-comodule とするとき, $v \in V$ に対し,

$$\rho(v) = \sum v_0 \otimes v_1 \in V \otimes C$$

と書く. V に入っているところは 0 番として, C に入っている部分を $1, 2, \ldots$ 番とする. 例えば余結合律を Σ 記法で書いてみると

$$\sum \rho(v_0) \otimes v_1 = \sum v_0 \otimes \Delta(v_1)$$

となる. これをさらに

$$= \sum v_0 \otimes v_1 \otimes v_2 \in V \otimes C \otimes C$$

と書く. 以下, v_0 のところに ρ をかけたり $v_1, v_2, \ldots$ のところに Δ をかけたりするごとに, 右側に番号を増やしていく. また, 余単位律は

$$\sum v_0 \varepsilon(v_1) = v$$

という風に書ける.

左 comodule の場合も番号は左から右に増えていくようにつける. (W,λ) を左 C-comodule とするとき, $w \in W$ に対し,

$$\lambda(w) = \sum w_{-1} \otimes w_0 \in C \otimes W$$

と書く. 余結合律を書いてみると,

$$\sum w_{-1} \otimes \lambda(w_0) = \sum \Delta(w_{-1}) \otimes w_0 = \sum w_{-2} \otimes w_{-1} \otimes w_0 \in C \otimes C \otimes W$$

となる.

定義 1.19 C を k-coalgebra, V, W を右 C-comodule とする.

(1) 線形写像 $f : V \to W$ が C-comodule map であるとは, 次が可換になることをいう (ρ は comodule structure map):

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ V \otimes C & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} & W \otimes C \end{array}.$$

Σ 記法でこの条件を書くと次のようになる:

$$\rho(f(v)) = \sum f(v_0) \otimes v_1 \quad ({}^\forall v \in V).$$

(2) V の subspace V' が $\rho(V') \subset V' \otimes C$ を満たすとき, V' を V の subcomodule という. このとき, $(V', \rho|_{V'})$ も右 C-comodule となる.

V を右 C-comodule, $V \supset V'$ を subcomodule とするとき, V/V' も右 C-comodule となる (quotient comodule という). 実際, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/V' & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & \big\downarrow \rho & & \big\downarrow \rho & & & & \\ 0 & \longrightarrow & V' \otimes C & \longrightarrow & V \otimes C & \longrightarrow & (V/V') \otimes C & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

において, $V \xrightarrow{\rho} V \otimes C \to (V/V') \otimes C$ が V/V' を経由するので, それにより induce された写像 $\bar{\rho} : V/V' \to (V/V') \otimes C$ をとれば, $(V/V', \bar{\rho})$ が右 C-comodule となる.

また, $f : V \to W$ を comodule map とすると, $\operatorname{Ker} f$, $f(V)$ はそれぞれ V, W の subcomodule となり, 線形同型

$$V/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} f(V)$$

は comodule としての同型でもある (coalgebra map の時と同様なので各自確かめておいてください).

注意 1.20 V を右 C-comodule とするとき, C^* の V への作用を $\rightharpoonup$ と書いて,

$$f \rightharpoonup v := \sum v_0 f(v_1) \quad (v \in V, \quad f \in C^*)$$

によって定義すると, これにより V は左 C^*-module となる.

例えば, $C = \bigoplus_{i,j=1}^n kX_{ij}$ を例 1.12 の coalgebra, $V = \bigoplus_{i=1}^n kx_i$ を例 1.18 の comodule とする. V は上記により左 C^*-module となるが, これは行列代数 $M_n(k)$ の n 次元ベクトル空間への普通の作用 (n 項縦ベクトルに左から行列をかける作用) と一致する. すなわち, 行列 $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(k)$ の V の元への作用は

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \dots, x_n)(a_{ij})_{i,j} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (c_1, \dots, c_n \in k)$$

となる.

1.7 bialgebra (双代数)

定義 1.21 B が k-algebra かつ k-coalgebra であって, 余積 $\Delta : B \to B \otimes B$ および counit $\varepsilon : B \to k$ が k-algebra map のとき, B は **bialgebra** (**双代数**) であるという. ($B \otimes B$ の algebra 構造については下記の注意を参照.)

注意 1.22 一般に, A, B が k-algebra のとき, $A \otimes B$ は積

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

により algebra の構造をもつ (単位元 は $1 \otimes 1$).

また, C, D を k-coalgebra とするとき, $C \otimes D$ にも k-coalgebra の構造が入る. 余積と counit は

$$\Delta(c \otimes d) = \sum (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2), \quad \varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon(c)\varepsilon(d)$$

により定める.

ここで, B が algebra かつ coalgebra のとき, $\Delta : B \to B \otimes B$ と $\varepsilon : B \to k$ が algebra map であるという条件を具体的に書いてみると, ${}^{\forall}x, y \in B$ について

(i) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$,

(ii) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$,

(iii) $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$,

(iv) $\varepsilon(1) = 1$

が成り立つこと, となる. ここで見方を変えると, (i) と (iii) は B の積 $m : B \otimes B \to B$ が coalgebra map であることを意味している. また, 以下 k を

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \varepsilon(1) = 1$$

により coalgebra と考えることにすれば, (ii) と (iv) は $u : k \to B$ が coalgebra map であることを意味している. 従って, "m, u が coalgebra map である" ということを bialgebra の定義にしてもよい.

これから bialgebra の例をいくつか見ていきたいが, その前に次のことを注意しておこう.

注意 1.23 B をある部分集合 $X \subset B$ で生成される k-algebra とする. もし, ある algebra map $\Delta : B \to B \otimes B$, $\varepsilon : B \to k$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(x)),$$
$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = x = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x))$$

が成り立つならば, Δ, ε は余結合律と余単位律を満たし, これにより B は bialgebra となる. 実際, $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ はいずれも algebra map になるから, 余結合律と余単位律は生成元についてのみ確かめればよい.

例 1.24 $B = k[X_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = k[X_{11},\dots,X_{nn}]$ を n^2 個の変数をもつ多項式環とする. $\Delta : B \to B\otimes B$ と $\varepsilon : B \to k$ を

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} X_{is}\otimes X_{sj}, \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

を満たす algebra map として定義すれば, 先程の注意により, B は bialgebra となることがわかる.

例 1.25 L を k 上の Lie algebra, $U(L)$ をその普遍包絡環とする. 一般に, A を k-algebra とすると, A はブラケット積

$$[x,y] = xy - yx \quad (x, y \in A)$$

により自然に Lie algebra となる. このとき, $U(L)$ の universality により, L から A への Lie algebra map は $U(L)$ から A への algebra map に一意に拡張できる.

さて, L から $U(L)\otimes U(L)$ への写像

$$L \to U(L)\otimes U(L), \quad x \mapsto x\otimes 1 + 1\otimes x$$

を考えると, これは Lie algebra map になるので, $U(L)$ から $U(L)\otimes U(L)$ への algebra map に拡張できる. それを $\Delta : U(L) \to U(L)\otimes U(L)$ とする. また, $L\to k$, $x\mapsto 0$ を拡張した algebra map を $\varepsilon : U(L)\to k$ とする. すると, Δ, ε は余結合律, 余単位律を満たし (注意 1.23 の通り, L の元についてのみ確かめればよい), これにより $U(L)$ は bialgebra となる.

例 1.26 $B(k)$ を例 1.5 の coalgebra とする. これに積を

$$d_m d_n = \begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix} d_{m+n}$$

によって定義すると, これは結合律を満たし, さらに d_0 が単位元になり, よってこれにより $B(k)$ は k-algebra となる. そこで, Δ と ε が algebra map になることがいえれば, $B(k)$ は bialgebra になることが分かる. まず, ε が algebra map になることは容易に分かる. Δ については,

$$\begin{aligned}
\Delta(d_m)\Delta(d_n) &= \Big(\sum_{i=0}^{m} d_i\otimes d_{m-i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} d_j\otimes d_{n-j}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} d_i d_j \otimes d_{m-i}d_{n-j} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m+n-i-j \\ m-i \end{pmatrix} d_{i+j}\otimes d_{m+n-i-j} \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

で, ここで各 $l=0,1,\ldots,m+n$ について, 多項式の等式 $(1+x)^l(1+x)^{m+n-l}=(1+x)^{m+n}$ の両辺の x^m の項を見比べると

$$\sum_{i=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+n-l \\ m-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}$$

を得るので, これを使って (1.1) の $i+j=l$ となる項をまとめていけば,

$$\Delta(d_m)\Delta(d_n)=\sum_{l=0}^{m+n}\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}d_l\otimes d_{m+n-l}=\Delta(d_nd_m)$$

となって, Δ も algebra map であることがいえる.

例 1.27 G を monoid とするとき, $kG=\bigoplus_{g\in G}kg$ に

$$(\sum_i a_ig_i)(\sum_j b_jh_j)=\sum_{i,j}a_ib_j(g_ih_j)\quad(a_i,b_j\in k,\quad g_i,h_j\in G)$$

によって積を定めれば, kG は algebra となる (単位元は G の単位元). これを monoid algebra と呼ぶ (もし G が群なら group algebra (群環) と呼ばれる). kG には例 1.3 のように coalgebra 構造 Δ,ε が入るが, これらは algebra map になるので, kG は bialgebra となる.

1.8 Hopf algebra の定義

定義 1.28 H を k-bialgebra とする. このとき $\mathrm{Hom}_k(H,H)$ は $*$-積により k-algebra の構造をもつが, もし恒等写像 $\mathrm{id}_H\in\mathrm{Hom}_k(H,H)$ が $*$ に関する逆元 S をもつならば, H は **Hopf algebra** であるという. また, S を H の **antipode** と呼ぶ.

$\mathrm{Hom}_k(H,H)$ の単位元は $u\varepsilon$ であったから, $S\in\mathrm{Hom}_k(H,H)$ が antipode であるための条件は

$$\mathrm{id}_H*S=u\varepsilon=S*\mathrm{id}_H$$

となることである. これを Σ 記法で表せば,

$$\sum h_1S(h_2)=\varepsilon(h)1=\sum S(h_1)h_2\quad({}^\forall h\in H)$$

となる.

例 1.29 $B(k)$ を例 1.26 の bialgebra とする. $S:B(k)\to B(k)$ を $d_n\mapsto(-1)^nd_n$ となる線形写像とすれば, これは antipode の条件を満たす. 実際, $n=0$ のときは $d_0S(d_0)=S(d_0)d_0=d_0d_0=d_0=1$ (単位元) であるし, $n>0$ のときは

$$\sum_{i=0}^{n}d_iS(d_{n-i})=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}(-1)^{n-i}d_0=(1-1)^nd_0=0,$$

同様に $\sum_{i=0}^{n}S(d_i)d_{n-i}=0$. よって, これにより $B(k)$ は Hopf algebra となる.

例 1.30 G を群とすると, 群環 kG は例 1.27 でみたように bialgebra の構造をもつ. さらに $S: kG \to kG$ を $S(g) = g^{-1}$ $(g \in G)$ となるような線形写像として定めれば, S は antipode の条件を満たし, kG が Hopf algebra であることが分かる.

次の例を説明する前に, antipode の基本的な性質をいくつかみておくことにする. 一般に, A, B を algebra とするとき, 線形写像 $f: A \to B$ で

$$f(ab) = f(b)f(a) \quad ({}^\forall a, b \in A), \quad f(1) = 1$$

を満たすものを **anti-algebra map** という. B^{op} を B の opposite algebra (積を逆に定義した algebra) とすれば, これは $A \to B^{\mathrm{op}}$, $a \mapsto f(a)$ が algebra map であることと同値である.

命題 1.31 H を Hopf algebra とするとき, その antipode $S: H \to H$ は anti-algebra map である.

G を群とするとき, $g, h \in G$ について $(gh)^{-1}(gh)(h^{-1}g^{-1})$ を二通りに計算すれば $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ が得られるが, この命題の証明はこれと似たような方法で行う.

[証明] 任意の $g, h \in H$ について,

$$\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3)$$

を二通りに計算することを考える. $\Delta(gh) = \sum g_1h_1 \otimes g_2h_2$ に注意して, 上の式の $S(g_1h_1)g_2h_2$ の部分に着目して計算すれば

$$\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3) = \sum \varepsilon(g_1h_1)S(h_2)S(g_2) = S(h)S(g)$$

を得る. 一方, $g_2h_2S(h_3)S(g_3)$ の部分に着目して計算すれば,

$$\begin{aligned}\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3) &= \sum S(g_1h_1)g_2\varepsilon(h_2)S(g_3) = \sum S(g_1h)g_2S(g_3) \\ &= \sum S(g_1h)\varepsilon(g_2) = S(gh).\end{aligned}$$

よって $S(gh) = S(h)S(g)$ を得る. また, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ より

$$S(1) = S(1)1 = \varepsilon(1)1 = 1.$$

□

C, D を coalgebra とするとき, 線形写像 $f: C \to D$ が **anti-coalgebra map** であるとは, f が

$$\Delta(f(c)) = \sum f(c_2) \otimes f(c_1), \quad \varepsilon(f(c)) = \varepsilon(c) \quad ({}^\forall c \in C)$$

を満たすことをいう. C の余積を逆 $(c \mapsto \sum c_2 \otimes c_1)$ にして定義される coalgebra を C^{cop} と書いて **coopposite coalgebra** という. $f: C \to D$ が anti-coalgebra map であることと $C^{\mathrm{cop}} \to D$, $c \mapsto f(c)$ が coalgebra map であることは同値である.

命題 1.32 H を Hopf algebra とするとき, その antipode S は anti-coalgebra map である.

[証明] 任意の $h \in H$ について,

$$\sum \Delta(S(h_1))\Delta(h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3))$$

を二通りに計算することを考える. まず $\Delta(h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3))$ の部分に着目して計算すると,

$$\begin{aligned}
& \sum \Delta(S(h_1))\Delta(h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) = \sum \Delta(S(h_1))(h_2 \otimes h_3)(S(h_5) \otimes S(h_4)) \\
= & \sum \Delta(S(h_1))(h_2 S(h_5) \otimes h_3 S(h_4)) = \sum \Delta(S(h_1))(h_2 S(h_4) \otimes \varepsilon(h_3)1) \\
= & \sum \Delta(S(h_1))(h_2 S(h_3) \otimes 1) = \sum \Delta(S(h_1))(\varepsilon(h_2)1 \otimes 1) = \Delta(S(h)).
\end{aligned}$$

一方, $\Delta(S(h_1))\Delta(h_2)$ の部分に着目して計算すると, Δ は algebra map だから,

$$\begin{aligned}
& \sum \Delta(S(h_1))\Delta(h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) = \sum \Delta(S(h_1)h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
= & \sum \Delta(\varepsilon(h_1)1)(S(h_3) \otimes S(h_2)) = \sum (1 \otimes 1)(S(h_2) \otimes S(h_1)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1).
\end{aligned}$$

よって $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$. また, $\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1$ の両辺に ε をかければ $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$ を得る. □

補題 1.33 H を bialgebra, $S : H \to H$ をある anti-algebra map とする. もし H がある部分集合 $X \subset H$ で (algebra として) 生成されており, さらに任意の $x \in X$ について

$$\sum x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1 = \sum S(x_1)x_2$$

となるならば, S は H の antipode となる.

[証明] $A = \{a \in H \mid \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a)1 = \sum S(a_1)a_2\}$ とおくと, $(\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta$, $(S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, $u\varepsilon$ は線形写像だから A は H の部分ベクトル空間である. 仮定より $X \subset A$ で, また, $S(1) = 1$ より $1 \in A$ である. この A が H の subalgebra であることを示せば, X が H を生成することから $A = H$ がいえて, 補題が証明される. だから, A が H の積で閉じていることを示せばよい. 任意の $a, b \in A$ について, $\Delta(ab) = \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$ で,

$$\sum a_1 b_1 S(a_2 b_2) = \sum a_1 b_1 S(b_2) S(a_2) = \varepsilon(b) \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(b)\varepsilon(a)1 = \varepsilon(ab)1,$$

同様に $\sum S(a_1 b_1) a_2 b_2 = \varepsilon(ab)1$ もいえるので, $ab \in A$ を得る. □

例 1.34 L を k 上の Lie algebra, $U(L)$ を L の普遍包絡環とする. 例 1.25 でみたように $U(L)$ は bialgebra の構造をもつ. $S : L \to U(L)^{\mathrm{op}}$ を $S(x) = -x$ $(x \in L)$ により定めると, これは Lie algebra map になっているので $U(L)$ からの algebra map $S : U(L) \to U(L)^{\mathrm{op}}$ に拡張できる. $U(L)^{\mathrm{op}}$ を $U(L)$ に直せば, これは anti-algebra map $S : U(L) \to U(L)$ となる.

補題 1.33 で $X = L$ とすると, $x \in L$ に対し $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$ で,

$$xS(1) + 1S(x) = x - x = 0 = \varepsilon(x)1, \quad S(x)1 + S(1)x = -x + x = 0 = \varepsilon(x)1$$

となるから, これにより $U(L)$ が Hopf algebra となることが分かる.

1.9 Hopf algebra の準同型と subquotient

まず, bialgebra の準同型などの定義から述べていく.

定義 1.35 B, B' を bialgebra とする.

(1) $f : B \to B'$ が **bialgebra map** であるとは, f が algebra map かつ coalgebra map であることをいう.

(2) $B \supset I$ が **biideal** であるとは, I が ideal かつ coideal であることをいう. このとき B/I は quotient algebra かつ quotient coalgebra であって, それにより B/I は bialgebra の構造をもつ.

(3) $B \supset A$ が subalgebra かつ subcoalgebra であるとき, A を B の **subbialgebra** であるという.

Hopf algebra については次のように定義する.

定義 1.36 H, H' を Hopf algebra とする.

(1) $f : H \to H'$ が bialgebra map のとき, f を **Hopf algebra map** であるという.

(2) $H \supset I$ が biideal で, さらに $S(I) \subset I$ を満たすならば, I を **Hopf ideal** であるという. このとき H/I は Hopf algebra の構造をもつ.

(3) $H \supset A$ が subbialgebra で, さらに $S(A) \subset A$ を満たすとき, A を H の **Hopf subalgebra** であるという.

ここで, Hopf algebra map の定義について, bialgebra map という条件だけで良いのか, antipode との可換性 $(f \circ S = S \circ f)$ は必要ないのかという疑問が生じるかもしれないが, 実は bialgebra map でさえあれば antipode との可換性は自動的に出てくる. そのことについて少し詳しくみていくことにする (affine group scheme との関連で重要になることも含むので).

補題 1.37 H を Hopf algebra とする.

(1) A を algebra とするとき, もし $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(H,A)$ が algebra map であれば, α には $*$-積に関する逆元が存在し, それは $\alpha \circ S$ である. 特に, A が commutative ならば H から A への algebra map 全体 $\mathrm{Alg}_k(H,A)$ は $*$-積に関して群をなす.

(2) C を coalgebra とするとき, もし $\beta \in \mathrm{Hom}_k(C,H)$ が coalgebra map であれば, β には $*$-積に関する逆元が存在し, それは $S \circ \beta$ である. 特に, C が cocommutative ならば C から H への coalgebra map 全体 $\mathrm{Coalg}_k(C,H)$ は $*$-積に関して群をなす.

[証明] (1) 任意の $h \in H$ に対し,

$$(\alpha * (\alpha \circ S))(h) = \sum \alpha(h_1)\alpha(S(h_2)) = \alpha(\sum h_1 S(h_2)) = \alpha(\varepsilon(h)1) = \varepsilon(h)1.$$

よって $\alpha * (\alpha \circ S) = u\varepsilon$ を得る. 同様に, $(\alpha \circ S) * \alpha = u\varepsilon$. よって $\alpha \circ S$ は $*$-積に関する α の逆元である. このとき S は anti-algebra map だから, $\alpha \circ S$ も anti-algebra map である.

A が commutative のとき, 積 $m : A \otimes A \to A$ が algebra map となるので, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Alg}_k(H,A)$ に対し, $\alpha_1 * \alpha_2 = m \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \circ \Delta$ も algebra map となる. よって, $\mathrm{Alg}_k(H,A)$ は $*$-積で閉じている. また, 単位元 $u\varepsilon$ を含む. そして $\alpha \in \mathrm{Alg}_k(H,A)$ の逆元 $\alpha \circ S$ は anti-algebra map であるが, A が commutative だからこれは algebra map でもあり, $\alpha \circ S \in \mathrm{Alg}_k(H,A)$ となる. 以上より, $\mathrm{Alg}_k(H,A)$ が $*$ に関して群をなすことがいえた.

(2) 任意の $h \in H$ に対し,

$$(\beta * (S \circ \beta))(h) = \sum \beta(h_1)S(\beta(h_2)) = (\mathrm{id} * S)(\beta(h)) = (u\varepsilon)(\beta(h)) = \varepsilon(h)1,$$

よって, $\beta * (S \circ \beta) = u\varepsilon$. 同様に, $(S \circ \beta) * \beta = u\varepsilon$ を得る. S は anti-coalgebra map だから, β の逆元 $S \circ \beta$ も anti-coalgebra map である.

C が cocommutative のとき, 余積 $\Delta : C \to C \otimes C$ は coalgebra map になる ($C \otimes C$ の余積は $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{tw} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \Delta)$ であることに注意) ので, $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Coalg}_k(C,H)$ に対し, $\beta_1 * \beta_2$ も coalgebra map となる. また, $u\varepsilon$ も coalgebra map である. $\beta \in \mathrm{Coalg}_k(C,H)$ の逆元 $S \circ \beta$ も C が cocommutative なので coalgebr map となり, 従って, $\mathrm{Coalg}_k(C,H)$ は $*$ に関して群をなす. □

さて, $f : H_1 \to H_2$ を Hopf algebra map とすると, $f \in \mathrm{Alg}_k(H_1,H_2)$ かつ $f \in \mathrm{Coalg}_k(H_1,H_2)$ であるから, $f \circ S$ と $S \circ f$ は共に $\mathrm{Hom}_k(H_1,H_2)$ における f の逆元であり, 従って一致しなければならない: $f \circ S = S \circ f$. すなわち f が antipode と可換であることは bialgebra map であることから自動的に従う.

さて, まだ話すべきこと (grouplike 元と primitive 元について, それから, module algebra と smash 積について, 等) もあるが, それは今後必要になった時に随時補足することにして, affine group scheme についての話に入っていくことにする.