第 8 回 代数群と量子群の表現論 研究集会 報告集

線形微分・差分方程式と affine group scheme

天野勝利 (筑波大学数理物質科学研究科)

2005 年 5 月 29 日発表, 於: 富士教育研修所

1　序文

線形微分方程式に関する代数的理論に, Picard-Vessiot 理論というものがあります. これは代数方程式の Galois 理論の, 線形常微分方程式における類似として, 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて Picard とその弟子 Vessiot によって研究され, その後, Kolchin [7] により, 微分体の概念や線形代数群の理論を発展させつつ整理・拡張されて現在の形に至っているものです. 最近の本では [11] が標準的な教科書とされています. また, その差分類似も 1960 年代から考察されていましたが, van der Put と Singer [10] によって, 差分方程式に対しては差分体だけでなく零因子をも許容した Picard-Vessiot 拡大を考察する必要がある, と発見されることで大きな進歩がありました.

最近, 筆者等 [4] により, それらを拡張した統一的な Picard-Vessiot 理論が得られました. その結果について解説するのがこの小論の目的です. 微分 Galois 理論と差分 Galois 理論を統一的に扱っていこうという試みは, わずにしかみられませんが, 差分 Galois 理論の草創期に既に Białynicki-Birula [6] によるものがあります. 他には, André [5] では微分幾何的なとらえかたで統一的な Picard-Vessiot 理論が展開されています. 今回はそれらのものとは手法が異なり, 竹内 [13] による Hopf 代数的手法による (拡張された) Picard-Vessiot 理論を, 上に挙げた差分類似を含むようにさらに発展させたものです.

まず, 2 節で従来の線形常微分方程式や線形常差分方程式の Picard-Vessiot 理論について簡単に解説した後で, 3 節から本論に入ります. 定理は結果のみで証明等は全然書いてないので, 詳細が知りたい方は [4] をご参照ください. ただ, [4] の証明はけっこう不親切 (「[13] と同様」と書いてある箇所が非常に多い) なので, そのような箇所については, [2, Part 3] に比較的丁寧に書いてありますのでそちらを参照して下さると良いかもしれません. また今回, Liouville 拡大 (代数方程式の Galois 理論でいうとこ

ろの巾根拡大に相当するもの) などについてはまったく触れていませんが, 興味がある方は [2, Part 3] または [3] をご参照ください.

2 Picard-Vessiot 理論とは?

2.1 線形常微分方程式の Picard-Vessiot 理論

代数方程式の Galois 理論における「体」の概念に相当するのは, Picard-Vessiot 理論では「微分体」という概念である. 一般に, 可換環 K に derivation $\partial : K \to K$ (加法的で $\partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$ を満たす写像) が与えられているとき, K を**微分環**といい, さらに K が体であるとき**微分体**という. 例えば, $\mathbb{C}[x]$ を多項式環, $\mathbb{C}(x)$ を有理関数体, $\partial = \frac{d}{dx}$ とすれば, $\mathbb{C}[x]$ は微分環で, $\mathbb{C}(x)$ は微分体となる. また一般に K を微分環とするとき, K の元のうち微分して 0 になるもの全体, すなわち,

$$K^\partial := \{c \in K \mid \partial(c) = 0\}$$

を K の**定数環** (体になるときは**定数体**) とよぶ. 先程の例でいえば, $\mathbb{C}[x]^\partial = \mathbb{C}(x)^\partial = \mathbb{C}$ となる. 以下, この小節では微分体はすべて標数 0 とする.

K を微分体とし, K 係数の線形常微分方程式

$$(\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0)u = 0 \quad (a_i \in K,\ u\text{: 未知関数}) \tag{2.1}$$

を考える. $K\langle\partial\rangle$ を K 係数の線形微分作用素の環, $P = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0 \in K\langle\partial\rangle$ とするとき, (2.1) に対応する $K\langle\partial\rangle$-加群として $V := K\langle\partial\rangle/K\langle\partial\rangle P$ をとる. $K \subset L$ を微分体の拡大とすると, L の中の (2.1) の解全体のなす空間と V から L への $K\langle\partial\rangle$-linear map 全体が丁度 L^∂ 上のベクトル空間として同型となる:

$$\mathrm{Hom}_{K\langle\partial\rangle}(V, L) \xrightarrow{\sim} \{a \in L \mid Pa = 0\}, \quad f \mapsto f([1]).$$

ここで, $[1]$ は $1 \in K\langle\partial\rangle$ の V における同値類である.

ここで, 線形微分方程式における「最小分解体」と, Galois 拡大にあたる, 「Picard-Vessiot 拡大」の定義をする.

定義 2.1 (1) $K \subset L$ を微分体の拡大とする. L が (2.1) の (または, V の) **分解体**とは, L が n 次元の解空間を含む, つまり, $\dim_{L^\partial} \mathrm{Hom}_{K\langle\partial\rangle}(V, L) = n$ となることをいう. さらに, L の K を含む部分微分体で分解体でもあるものが L に限るとき, L を (2.1) の**最小分解体**とよぶ.

(2) L が最小分解体で, さらに $L^\partial = K^\partial$ がなりたつとき, L/K を (2.1) に関する **Picard-Vessiot 拡大**という.

そして以下が Picard-Vessiot 理論の基本定理である:

定理 2.2 K は標数 0 の微分体, K^∂ が代数閉体であったとする. このとき,

(Galois 対応) L/K を Picard-Vessiot 拡大, L の K 上の自己同型で ∂ と可換なもの全体のなす群を $\mathrm{Aut}_\partial(L/K)$ とすると, これは K^∂ 上の線形代数群の構造をもつ. $\mathrm{Aut}_\partial(L/K)$ の閉部分群全体の集合を $\mathcal{H}$ とし, L/K の中間微分体全体を $\mathcal{A}$ とする. このとき $\mathcal{H}$ と $\mathcal{A}$ は

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \to \mathcal{H}, \quad M \mapsto \mathrm{Aut}_\partial(L/M), \\ &\mathcal{H} \to \mathcal{A}, \quad H \mapsto L^H \end{aligned}$$

により 1 対 1 に対応する. この $\mathrm{Aut}_\partial(L/K)$ は L/K の**微分 Galois 群** (または **Picard-Vessiot 群**) と呼ばれる.

(存在性) 任意の K 係数線形常微分方程式 (2.1) に対して, それに関する Picard-Vessiot 拡大 L が, K の元を変えない微分体の同型 (derivation と可換な環同型) の差を除き一意的に存在する.

このように, 線形常微分方程式について, 代数方程式の Galois 理論と類似の理論を展開しようというのが Picard-Vessiot 理論の目的である.

2.2 差分類似

可換環 K に自己同型 $\tau : K \to K$ が与えられているとき, K を**差分環**という[1]. 例えば, 再び $\mathbb{C}(x)$ を有理関数体とし, τ を $f(x) \mapsto f(x+1)$ により定めれば, $\mathbb{C}(x)$ は差分体となる. また一般に K を差分環とするとき, τ で不変な K の元全体:

$$K^\tau := \{c \in K \mid \tau(c) = c\}$$

を K の**定数環**という. 先程の例では $\mathbb{C}(x)^\tau = \mathbb{C}$ となる.

K を差分体とし, K 係数の差分方程式

$$(\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_0)u = 0 \quad (a_i \in K,\ u : \text{未知関数}) \tag{2.2}$$

を考える. $K\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ を K 係数の線形差分作用素の環, $P = \tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_0 \in K\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ とするとき, (2.2) に対応する $K\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-加群として

$$V := K\langle\tau, \tau^{-1}\rangle / K\langle\tau, \tau^{-1}\rangle P$$

[1] オリジナルな定義 (Ritt による) では, τ が単に環準同型である場合でも差分環と呼んだ. こちらの定義を採用するときは, τ が自己同型であるような差分環は inversive であるといって区別する.

をとる．そして, 差分体の拡大 $K \subset L$ で $\dim_{L^\tau} \mathrm{Hom}_{K\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(V, L) = n$ となるものを (2.2) の分解体と呼び, そのうち極小なものを最小分解体, さらに $L^\tau = K^\tau$ となるものを Picard-Vessiot 拡大とよぶことにする．

ところが困ったことに, そのようにして Picard-Vessiot 拡大を定義して Galois 理論を展開しようとすると, 微分方程式の時には成り立っていた「存在性」の部分が破綻してしまう．これを簡単な具体例でみていくことにしよう．

例 2.3 ([10, Example 0.1, p. 2]) $K = (K^\tau =)\ \mathbb{C}$ とし, $K \subset L$ を差分体の拡大とする．このときもし L が差分方程式 $(\tau+1)u = 0$ の解として $0 \neq a \in L$ をもつとすると, $\tau(a) = -a$ より, $\tau(a^2) = a^2$ となるから, $a^2 \in L^\tau$．このときもし $a^2 \in \mathbb{C}$ とすると, $a \in \mathbb{C}$ となってしまい矛盾するので, $a^2 \notin \mathbb{C}$ となる．従って $L^\tau \neq K^\tau$．すなわち $(\tau+1)u = 0$ の Picard-Vessiot 拡大となるような K の拡大差分体は存在しない.

この問題を解決したのが, van der Put と Singer [10] である．解決策のポイントは, Picard-Vessiot 拡大を体の範囲に限らないことであった．求める性質を満たす差分環を考えて, それが体にならなくても Picard-Vessiot 拡大と呼んでしまおう, というわけである．

再び K を差分体として, 差分方程式 (2.2) を考える．今度は, K に形式的に (2.2) の n 個の線形独立な解をつけ加えていって, 「最小分解環」にあたるものをつくってみることにする．X_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ を $2n$ 個の独立変数として, K 上の多項式環に $1/\det(X_{ij})$ を添加した環 $F = K[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})]_{1 \leq i,j \leq n}$ を考える．この F に,

$$\tau \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

により, K を部分差分環にもつような差分環の構造を入れる．このとき $X_{11}, \ldots, X_{1n}$ が n 個の線形独立な (2.2) の解になっている．

F のイデアル I が $\tau(I) \subset I$ を満たすとき, I を F の**差分イデアル**という．ここで, J を F の極大差分イデアルとし, $A := F/J$ とする．また L を A の全商環とする．こうすると $L^\tau = A^\tau$ かつ L^τ/K^τ が代数拡大であることが証明できる (証明は, 例えば [8, Appendix] の議論を差分環用に書き換えることによりできる)．さらに, L は引続き n 個の線形独立な (2.2) の解を含んでいる上, 体とは限らないものの, 体に近い性質をもっている．例えば L は有限個の体の直積になっている (これは後で示す命題 3.6 の特別な場合.):

命題 2.4 ある有限個の原始巾等元 $e_1,\dots,e_m \in A$ で, $\tau e_i = e_{i+1}$ $(i=1,\dots,m-1)$, $\tau e_m = e_1$ を満たすものが存在し, $A = \prod_{i=1}^m Ae_i$, 各 Ae_i は整域となる. したがって, $L = \prod_{i=1}^m Le_i$ で, 各 Le_i は体となる.

さらに, ここで K^τ が代数閉体であったと仮定すると, $L^\tau = A^\tau = K^\tau$ となり, A は [10, Definition 1.5] の意味で **Picard-Vessiot ring** と呼ばれるもの, L は [10, Definition 1.22] の意味で **total Picard-Vessiot ring** と呼ばれるものとなる (とりあえず, 「Picard-Vessiot 拡大」に相当する概念だと思ってください). さらに A は classically separable な K-algebra であったと仮定する (つまり任意の体拡大 $K \subset M$ に対して $A \otimes_K M$ の Jaconbson 根基が 0 になるとする; この仮定をする理由は, 後で述べる注意 3.12 の問題に関係がある). 以上の仮定のもと, 先程つまづいていた問題を解決した上で, Galois 理論が展開できる:

定理 2.5 上記の仮定のもと, τ と可換な L の K 上の自己同型全体がなす群を $\mathrm{Aut}_\tau(L/K)$ と書く. すると $\mathrm{Aut}_\tau(L/K)$ は K^τ 上の線形代数群の構造をもつ. $\mathcal{A}$ を L の K を含む部分差分環ですべての非零因子が可逆元であるようなもの全体, $\mathcal{H}$ を $\mathrm{Aut}_\tau(L/K)$ の閉部分群全体とすると, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{H}$ とは

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \to \mathcal{H}, &\quad M \mapsto \mathrm{Aut}_\tau(L/M), \\ \mathcal{H} \to \mathcal{A}, &\quad H \mapsto L^H \end{aligned}$$

により 1 対 1 に対応する.

実は, 上記の $\mathcal{A}$ の元は, 後で定義する Artin 単純 D-module algebra という良い algebra のクラスにすべて入っている.

なお, 例 2.3 で挙げた差分方程式について total Picard-Vessiot ring を計算してみると, $L \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ となり, $(1,-1) \in L$ が $(\tau+1)u = 0$ の解となることがわかる. Galois 群は $\mathrm{Aut}_\tau(L/K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

3 D-module algebra の Picard-Vessiot 理論

ここからが本題です. ここでは微分環, 差分環や, 差分微分環等々の概念を, ある余可換な Hopf 代数 D 上の module algebra としてとらえ直し, それらの D-module algebra たちに関する Picard-Vessiot 理論を構築することを考えます.

従来の Picard-Vessiot 理論では, もとの線形微分方程式の係数体は標数 0, その定数体 (係数体のうち微分して 0 になるもの全体) は代数閉体, と仮定し, 登場する Galois 群は線形代数群なのですが, ここでは正標数の場合や定数体が代数閉体でない場合も

扱うために, 登場する Galois 群は affine group scheme, あるいはその座標環としての可換 Hopf 代数です. そのため, 余可換なものと可換なものとの二種類の Hopf 代数が, それぞれ違った役割をもって登場することになります. わからない用語などありましたら, Hopf 代数などに関する概念や用語については [1, 9, 12] を, affine group scheme や可換 Hopf 代数については [15] を御参照ください.

3.1 準備

体 R をとり, 基礎体として固定する. 以下, algebra, coalgebra, bialgebra, Hopf 代数などはとくに断りがない限り R 上で考えているものとする. また, coalgebra 構造は常に (Δ, ε), Hopf 代数の antipode は常に S で表すことにする.

D を bialgebra とする. このとき A が (左) D**-module algebra** であるとは, A が (左) D-module 構造 $D \otimes_R A \to A$ をもち, かつ algebra であって, 任意の $a, b \in A$, $d \in D$ に対し,

$$d(ab) = \sum_{(d)} (d_{(1)}a)(d_{(2)}b), \quad d \cdot 1 = \varepsilon(d)1 \tag{3.3}$$

が成立することをいう. ここで, $\Delta(d) = \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes d_{(2)}$ としている. またこのとき, $A \otimes_R D$ に次のような積を入れた algebra を **smash 積**といい, $A \# D$ で表す: $a, b \in A$, $c, d \in D$ に対し, 例えば $a \otimes c$ を $a \# c$ と書くことにして, 積を

$$(a\#c)(b\#d) = \sum_{(c)} a(c_{(1)}b)\#c_{(2)}d$$

により定める.

例 3.1 (1) G を群, RG を G の R 上の群環とするとき, algebra map $\Delta : RG \to RG \otimes_R RG$, $\varepsilon : RG \to R$ と anti-algebra map $S : RG \to RG$ を, 各 $g \in G$ に対し

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}$$

となるように定めると, これにより RG は余可換 Hopf 代数となる. A を RG-module algebra とすると, 条件 (3.3) は, $a, b \in A$, $g \in G$ に対し,

$$g(ab) = (ga)(gb), \quad g \cdot 1 = 1$$

となることを意味している. つまり, この場合 G の各元は A に自己同型として作用している. 逆に, A が algebra であって, G が A に左から自己同型として作用しているとき, 自然に A を RG-module algebra とみることができる.

とくに, G が rank 1 の自由 abel 群のとき, A が可換 RG-module algebra であることと, A が R をその定数環に含む差分環であることが同じこととなる. またこのとき $A\#RG$ は, 環としては A 係数の線形差分作用素環 $A\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$ と同じものとなる.

(2) $\mathfrak{g}$ を R 上の Lie 環, $U(\mathfrak{g})$ をその普遍包絡環とするとき, algebra map $\Delta: U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes_R U(\mathfrak{g})$, $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to R$ と anti-algebra map $S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ を, 各 $d \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0, \quad S(d) = -d$$

となるように定めると, これにより $U(\mathfrak{g})$ は余可換 Hopf 代数となる. A を $U(\mathfrak{g})$-module algebra とすると, 条件 (3.3) は, $a, b \in A$, $d \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$d(ab) = (da)b + a(db), \quad d \cdot 1 = 0$$

となることを意味している. つまり, この場合 $\mathfrak{g}$ の各元は A に derivation として作用している. 逆に, A が algebra かつ $U(\mathfrak{g})$-module であって, $\mathfrak{g}$ の各元が derivation として作用しているならば, 自然に A を $U(\mathfrak{g})$-module algebra とみることができる.

とくに, $\mathfrak{g} = R\partial$ が R 上の 1 次元 Lie 環のとき, A が可換 $U(\mathfrak{g})$-module algebra であることと, A が R をその定数環に含む微分環であることが同じこととなる. またこのとき $A\#U(\mathfrak{g})$ は, 環としては A 係数の線形微分作用素環 $A\langle\partial\rangle$ と同じものになる.

(3) 再び $\mathfrak{g}$ を R 上の Lie 環とし, ある群 G が左から $\mathfrak{g}$ に Lie 環の自己同型として作用しているとする (自明な作用でもよい). このとき $U(\mathfrak{g})$ は自然に RG-module algebra となる. $U(\mathfrak{g}) \otimes_R RG$ に,

$$\Delta(c \otimes d) = \sum_{(c),(d)} (c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes (c_{(2)} \otimes d_{(2)}), \quad \varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon(c)\varepsilon(d) \qquad (c \in U(\mathfrak{g}),\ d \in RG)$$

により coalgebra 構造を入れ, さらに smash 積 $U(\mathfrak{g})\#RG$ としての algebra 構造を考えると, $U(\mathfrak{g})\#RG$ は, antipode $S(c\#d) = (1\#S(d))(S(c)\#1)$ をもつ余可換な Hopf 代数となる.

C が 0 でない coalgebra で, 0 と自分自身以外に subcoalgebra をもたないとき, C は単純 coalgebra であるという. また, 単純 subcoalgebra を唯一つしかもたないような coalgebra を既約 coalgebra という. それから, coalgebra C が pointed であるとは, C の単純 subcoalgebra がすべて R 上 1 次元であることをいう.

余可換かつ pointed な Hopf 代数の構造について, 次のことが知られている ([9, Corollary 5.6.4],[12, Theorem 8.1.5]):

命題 3.2 D を余可換かつ pointed な Hopf 代数, D^1 を 1 を含む D の最大の既約 subcoalgebra, $G = G(D)$ を D の grouplike 元全体のなす群とする. このとき D^1 は

D の Hopf subalgebra かつ RG-module algebra で, $D^1\#RG \to D$, $c\#d \mapsto cd$ は Hopf 代数としての同型である.

R の標数が 0 のとき, R 上の余可換かつ既約な Hopf 代数は常に, ある Lie 環の普遍包絡環になることが知られている ([9, Theorem 5.6.5], [12, Ch. XIII]). このことと, 上の命題を合わせると, 標数 0 の体上の余可換 pointed な Hopf 代数は常に例 3.1 (3) の形をしていることがわかる.

3.2 Artin 単純 (AS) D-module algebra

以下ずっと, $D = D^1\#RG$ を余可換かつ pointed な Hopf 代数とする. またさらに, 次の仮定をする:

仮定 3.3 D^1 は Birkhoff-Witt bialgebra である. つまり, 任意の primitive 元 $d \in P(D^1)$ に対し, ある無限列 $\{d_0 = 1, d_1 = d, d_2, d_3, \dots\} \subset D^1$ で $\Delta(d_n) = \sum_{i=0}^{n} d_i \otimes d_{n-i}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たすものがある. ([1, §2.5.4] を参照.)

R の標数が 0 のときはこの仮定は不要である. 実際, $D^1 = U(\mathfrak{g})$ $(\mathfrak{g} = P(D^1))$ となり, 各 $d \in \mathfrak{g}$ に対し, $\{d_0 = 1, d_1 = d, \dots, d_n = d^n/n!, \dots\}$ が条件を満たす.

さて, 2.2 節で既にみたように, 差分方程式の Picard-Vessiot 理論においては差分体だけを扱うのでは不十分で, 体よりはもう少し弱い条件で, しかも, 良い Galois 理論をもつような差分環を探してくる必要があった. この小節ではそのような良い環のクラスとして, Artin 単純 (AS) D-module algebra たちについて調べていくことにする.

以下, D-module algebra たちは特に断らない限り常に可換とする.

定義 3.4 K を D-module algebra とし, I を K のイデアルとするとき, I が **D-不変イデアル**であるとは, $D(I) \subset I$ となることをいう. K の D-不変イデアルが 0 と K しかないとき, K は**単純 D-module algebra** であるという.

V を D-module とするとき,

$$V^D := \{v \in V \mid dv = \varepsilon(d)v \text{ for all } d \in D\}$$

を V の **D-invariants** と呼ぶ. 特に, K が D-module algebra のときは K^D を K の**定数環 (体)** とよぶこともある.

補題 3.5 K が単純 D-module algebra ならば, K^D は体である.

[証明] $\mathrm{End}_{K\#D}(K)\to K^D,\ f\mapsto f(1)$ が環同型なので, $K\#D$-module の圏における Schur の補題により従う. $\square$

命題 3.6 K を単純 D-module algebra かつ Noether 環とする. $\Omega(K)$ を K の minimal prime ideal 全体の集合とすると, G は $\Omega(K)$ に作用する.

$$G_P=\{g\in G\mid gP=P\}\quad (P\in\Omega(K)),$$
$$G_{\Omega(K)}=\{g\in G\mid gP=P \text{ for all } P\in\Omega(K)\}$$

とする. このとき,

(i) G は $\Omega(K)$ に推移的に作用する.

(ii) 各 $P\in\Omega(K)$ は D^1-不変で, 従って K/P は $D^1\#RG_P$-module algebra となる. さらに K/P は $D^1\#RG_{\Omega(K)}$-module algebra として単純である.

(iii) 各 $g\in G$ は同型 $K/P\xrightarrow{\sim}K/gP$ $(P\in\Omega(K))$ を induce するので, $\prod_{P\in\Omega(K)}K/P$ には D-module algebra の構造が入る. $P\in\Omega(K)$ を一つ固定すると, D-module algebra として

$$K\simeq\prod_{Q\in\Omega(K)}K/Q=\prod_{g\in G/G_P}K/gP.$$

ただし, 最後の $\prod_{g\in G/G_P}$ は, 正確には G/G_P のある代表系をとって, それをわたる (以下同様).

[証明] (ii) 仮定 3.3 により D^1 は [14, Definition 5.2] の意味で convolutionally reduced であることがいえるので, 前半は [14, Theorem 5.9] から従う. $J\subsetneq K$ を, P を含む任意の $D^1\#RG_{\Omega(K)}$-不変イデアルとする. このとき $J=P$ がいえれば (ii) の後半がいえたことになる. $\bigcap_{g\in G/G_{\Omega(K)}}gJ$ は K の D-不変イデアルで, 1 を含まないので, K が単純 D-module algebra であることにより, $\bigcap_{g\in G/G_{\Omega(K)}}gJ=(0)\subset P$. よって, P は素イデアルなので, ある g があって $gJ\subset P$, したがって $gP\subset gJ\subset P$ となる. しかし P は minimal prime なので, $P=gJ=gP$, よって, $g^{-1}P=J=P$ を得る.

(i) $P\in\Omega(K)$ をひとつとり固定する. すると $\bigcap_{g\in G}gP$ と $\bigcap_{Q\in\Omega(K)}Q$ とは (ii) より D-不変だが, 1 を含まないので,

$$\bigcap_{g\in G}gP=0=\bigcap_{Q\in\Omega(K)}Q. \tag{3.4}$$

よって $\{gP\mid g\in G\}=\Omega(K)$ を得る.

(iii) $Q,Q'\in\Omega(K)$, $Q\neq Q'$ とすると, $Q+Q'$ は Q を真に含む $D^1\#RG_{\Omega(K)}$-不変イデアルだから, (ii) により $Q+Q'=K$. このことと (3.4) から, 中国剰余定理により主

張が従う. □

定義 3.7 K が単純 D-module algebra かつ Artin 環であるとき, K は **Artin 単純 D-module algebra**, または略して **AS D-module algebra** (AS=artinian simple) であるという.

K が AS D-module algebra ならば, $\Omega(K)$ は K の極大イデアルの集合でもある. 従って命題 3.6 により, K は有限個の互いに同型な体の直積になっている. 例えば 2.2 節でみた total Picard-Vessiot ring は G が rank 1 の自由 abel 群である場合の AS RG-module algebra になっている.

$G = \{1\}$ ならば AS D-module algebra は必ず体になるが, 一般には体とは限らない. しかし, 例えば下のような, 体に近い非常に良い性質をもっている.

補題 3.8 K を AS D-module algebra とするとき, 任意の $K\#D$-module は free K-module である.

[証明] 命題 3.6 により, ある原始巾等元 $e_1 \in K$ と $g_2, \ldots, g_m \in G$ があって, $K = \prod_{i=1}^m Ke_i$ $(e_i = g_i e_1,\ i = 2, \ldots, m)$ と書ける. $K_1 = Ke_1$ とすると K_1 は e_1 を単位元とする体である.

V を $K\#D$-module とする. このとき $V_1 = e_1 V$ とすると, V_1 は K_1-module で, K_1 は体だから, K_1 上のベクトル空間としての基底 $\{b_\lambda\}$ をもつ. このとき, $b'_\lambda = b_\lambda + g_2 b_\lambda + \cdots + g_m b_\lambda$ とおくと, K-module として $V = \bigoplus_\lambda K b'_\lambda$ となり, V は $\{b'_\lambda\}$ を基底とする free K-module であることがわかる. □

3.3 Picard-Vessiot 拡大と Galois 対応

以上の準備のもと, 今回得られた結果として, AS D-module algebra について, 2 節のような Picard-Vessiot 理論の基本定理がどう統一・拡張されるのかを見ていくことにする. K を AS D-module algebra とする. V を $K\#D$-module とすると, 補題 3.8 より, V は free K-module である. ここでは V の K-module としての rank を K-free rank と呼ぶことにして, $\mathrm{rk}_K V$ と書くことにする. また, V, W を $K\#D$-module とするとき, $V \otimes_K W$ にも

$$(a\#d)(v \otimes w) = a \sum_{(d)} d_{(1)} v \otimes d_{(2)} w \quad (a \in K,\ d \in D,\ v \in V,\ w \in W)$$

により $K\#D$-module 構造を入れる.

まず, 最小分解代数の概念を定義する:

定義 3.9 $K \subset L$ を AS D-module algebra の拡大, V を $K\#D$-module で $\mathrm{rk}_K V < \infty$ となるものとする. もし $\dim_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) = \mathrm{rk}_K V$ ならば L/K は V の**分解代数**であるという. またこのときさらに, K と各 $f \in \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ に対する $f(V)$ をすべて含むような, L の AS D-module subalgebra が L 自身しかないとき, L/K を V の**最小分解代数**という.

次に, AS D-module algebra の Picard-Vessiot 拡大を定義する. ここでは, [13] による intrinsic な Picard-Vessiot 拡大の定義を踏襲する. この定義は 2 節などとはやり方が異なるが, 理論展開にいくつか利点 (例えば, Picard-Vessiot 群の構造と Picard-Vessiot 拡大の環構造との関係が分かりやすくなる等) がある.

定義 3.10 $K \subset L$ を AS D-module algebra の拡大とする. L/K が Picard-Vessiot 拡大であるとは, 次の (i), (ii) を満たすことをいう:

(i) $L^D = K^D$,

(ii) ある D-module subalgebra $L \supset A \supset K$ が存在して, A の全商環が L と一致し, さらに $H = (A \otimes_K A)^D$ が左 A-module として $A \otimes_K A$ を生成する. すなわち, $A \otimes_K A = A \cdot H$.

実は上記の A はもし存在すれば一意であることが証明できて, L/K の **principal algebra** と呼ばれる. また H は後で Galois 群の座標環の役割を果たす. これらを込めて, 以下「$(L/K, A, H)$ が Picard-Vessiot 拡大である」という言い方をすることがある.

まず, 上で定義した意味での Picard-Vessiot 拡大について, Galois 対応が成立する. AS D-module algebra の拡大 $K \subset L$ に対して, $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ を, D-linear な L の K 上の自己同型全体からなる群とする.

定理 3.11 (Galois 対応) $(L/K, A, H)$ を AS D-module algebra の Picard-Vessit 拡大, $k := K^D = L^D$ とおく. このとき,

(1) H は k 上の可換 Hopf 代数の構造をもつ. $\mathbf{G}(L/K) := \mathrm{Spec} H$ を対応する affine group scheme とし, 可換 k-algebra に群を対応させる group functor $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ を $\mathbf{Aut}_D(A/K)(T) = \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T/K \otimes_k T)$ により定義する (ただし D の T への作用は $dt = \varepsilon(d)t$ ($d \in D$, $t \in T$) により定める). すると, group functor として $\mathbf{G}(L/K) \simeq \mathbf{Aut}_D(A/K)$ である. 特に, $\mathbf{G}(L/K)(k) = \mathrm{Aut}_D(A/K) = \mathrm{Aut}_D(L/K)$ となる. この $\mathbf{G}(L/K)$ は L/K の **Picard-Vessiot group scheme** とよばれる.

(2) H の Hopf ideal 全体の集合を $\mathcal{H}$ とし, L/K の中間 AS D-module algebra 全体の集合を $\mathcal{A}$ とすると, $\mathcal{H}$ と $\mathcal{A}$ は

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} \to \mathcal{A}, \quad I \mapsto \{x \in L \mid x \otimes 1 - 1 \otimes x \in I \cdot (L \otimes_K L)\}, \\ &\mathcal{A} \to \mathcal{H}, \quad M \mapsto H \cap \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L) \end{aligned}$$

により 1 対 1 に対応する.

(3) 上の対応で $M \in \mathcal{A}$ と $I \in \mathcal{H}$ が対応するとき, $(L/M, AM, H/I)$ も Picard-Vessiot 拡大である. また, M/K が Picard-Vessiot 拡大であることと $\mathbf{G}(L/M)$ が $\mathbf{G}(L/K)$ の normal subgroup scheme であることが同値で, そのとき $\mathbf{G}(M/K) \simeq \mathbf{G}(L/K)/\mathbf{G}(L/M)$ である.

注意 3.12 上記の Galois 対応は, 線形代数群のかわりに可換 Hopf 代数 (affine group scheme) を用いているため, 例えば定理 2.2 における Galois 対応などとはだいぶ異なって見えるかもしれない. 上記の対応で $M \leftrightarrow I$ となるとき, $\mathbf{G}(L/M) = \mathrm{Spec} H/I \simeq \mathbf{Aut}_D(A/M)$ となることは (3) から出てくるけれども, M は “$\mathbf{G}(L/M)$ の不変元全体” のようなものになっているのだろうか? これについては, 少なくとも H が $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ の座標環と一致しているときには, $M = L^{\mathrm{Aut}_D(L/M)}$ となっていることがいえる (証明は [8, Proposition 3,4] と同様). 例えば K が完全体で, k が代数閉体のとき, A は reduced なので, $A \otimes_K A$ も reduced, よって H も reduced であることがいえて, この場合には H は $\mathbf{G}(L/K)(k) \simeq \mathrm{Aut}_D(L/K)$ の座標環と一致している.

さて, 定義 3.10 のような Picard-Vessiot 拡大の定義は 2 節とはやりかたが違ったので, 実際に従来の理論の拡張になっているかどうかはこれだけでは分からない. しかし, 次に定理として挙げるように, Picard-Vessiot 拡大の最小分解代数としての特徴づけができるので, 両者の定義の同値性がわかる.

$K \subset L$ を AS D-module algebra の拡大, $u_1, \dots, u_n \in L$ を有限個の元とするとき, K と $u_1, \dots, u_n$ を含む L の最小の AS D-module subalgebra を $K\langle u_1, \dots, u_n\rangle$ と書く. L 自身が $L = K\langle u_1, \dots, u_n\rangle$ という形で書けるときには, 拡大 L/K は**有限生成**であるという (L が有限生成 K-algebra であるという意味ではないので注意).

定理 3.13 (Picard-Vessiot 拡大の特徴づけ) $K \subset L$ を AS D-module algebra の拡大とし, $L^D = K^D$ とする. このとき L/K が有限生成 Picard-Vessiot 拡大であることと, L/K がある有限 K-free rank をもつ $K\#D$-module V の最小分解代数であることは同値である.

最後に Picard-Vessiot 拡大の存在性について. 差分方程式の Picard-Vessiot 理論と同様, G が自明でない群の場合には, D-module field だけを扱っていては, たとえ K^D

が代数閉体であっても, Picard-Vessiot 拡大になるような分解体を見つけることができない可能性がある. AS D-module algebra にまで範囲を広げることによってはじめて, Picard-Vessiot 拡大になるような分解代数の存在がいえる:

定理 3.14 (存在性) K を AS D-module algebra, K^D は代数閉体だとする. V を有限 K-free rank をもつ $K\#D$-module とするとき, K を D-module subalgebra として含むある AS D-module algebra L が存在して, $L^D = K^D$ かつ L/K は V の最小分解代数となる. また, このような L は D-linear な K-algebra isomorphism の差を除き一意的に存在する.

上記の L の構成方法は, 2.2 節で total Picard-Vessiot ring を構成した方法と大体同じである.

参考文献

[1] E. Abe, *"Hopf Algebras"*, Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge University Press, 1980.

[2] K. Amano, *Relative invariants, difference equations, and the Picard-Vessiot theory*, Thesis, University of Tsukuba, arXiv:math.AC/0503291.

[3] K. Amano, *Liouville extensions of artinian simple module algebras*, Comm. Algebra, to appear.

[4] K. Amano, A. Masuoka, *Picard-Vessiot extensions of artinian simple module algebras*, J. Algebra 285 (2005), 743–767.

[5] Y. André, *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34 (2001), 685–739, arXiv:math.GM/0203274.

[6] A. Białynicki-Birula, *On Galois theory of fields with operators*, Amer. J. Math. 84 (1962), 89–109.

[7] E. R. Kolchin, *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, Ann. of Math. 49 (1948), 1–42.

[8] A.H.M. Levelt, *Differential Galois theory and tensor products*, Indag. Mathem., N.S., 1(4) (1990), 439–450.

[9] S. Montgomery, *"Hopf Algebras and Their Actions on Rings"*, CBMS Reg. Conf. Series 82, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[10] M. van der Put, M. F. Singer, *"Galois Theory of Difference Equations"*, LNM 1666, Springer, 1997.

[11] M. van der Put, M. F. Singer, *"Galois Theory of Linear Differential Equations"*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 328, Springer, 2003.

[12] M. Sweedler, *"Hopf Algebras"*, Benjamin, New York, 1969.

[13] M. Takeuchi, *A Hopf algebraic approach to the Picard-Vessiot theory*, J. Algebra 122 (1989), 481–509.

[14] A. Tyc and P. Wiśniewski, *The Lasker-Noether theorem for commutative and noetherian module algebras over a pointed Hopf algebra*, J. Algebra 267 (2003), 58–95.

[15] W. C. Waterhouse, *"Introduction to Affine Group Schemes"*, GTM 66, Springer, 1979.