井草氏の結果の多変数化 (局所ゼータ関数がガンマ関数の積で書ける場合について)

筑波大学数学研究科 (D1)　天野勝利 (Amano, Katsutoshi)

1　序文

K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$, V を $\mathbb{C}$ 上 n 次元ベクトル空間, G を連結かつ簡約可能な線形代数群で K 上定義されているものとし, (G, V) が概均質ベクトル空間で, 定数でない相対不変式を持つものであるとする. また, (G, V) の K 上の基本相対不変式を $P_1, \cdots, P_r$, V_K を V の K-有理点全体とする. そして, $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ $(\mathrm{Re}(s_1) > 0, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > 0)$, および V_K 上の Schwartz space $\mathcal{S}(V_K)$ の元 Φ に関して, 局所ゼータ関数 $Z_K(s, \Phi)$ を

$$Z_K(s, \Phi) = \int_{V_K} |P_1(x)|_K^{s_1} \cdots |P_r(x)|_K^{s_r} \Phi(x) dx$$

により定める.

また, 適当な V_K の内積 $\langle\ ,\ \rangle_K$ をとると, $P_i^*(\partial_x) \exp(\langle x, y \rangle_K) = \overline{P_i(y)} \exp(\langle x, y \rangle_K)$ $(i = 1, \cdots, r)$ なる微分演算子 $P_1^*(\partial_x), \cdots P_r^*(\partial_x)$ があって, 各 $m = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対し,

$$P_1^*(\partial_x)^{m_1} \cdots P_r^*(\partial_x)^{m_r} [P_1(x)^{s_1 + m_1} \cdots P_r(x)^{s_r + m_r}] = b_m(s) P_1(x)^{s_1} \cdots P_r(x)^{s_r}$$

となる多項式 $b_m(s) \in \mathbb{C}[s] = \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_r]$ が存在することが知られている. この $b_m(s)$ は佐藤の b-関数と呼ばれている.

ここで, $\Phi(x)$ として test function: $\phi_K(x) = \exp(-\langle x, x \rangle_K)$ をとるとき, $Z_K(s, \phi_K)$ がガンマ関数の積によって explicit に計算できることがある. そのような例としては, 例えば C. L. Siegel による正定値対称行列の空間における積分 ([Si, Hilfssatz 37]) などがある. さらに一般には, 井草準一氏により, $r = 1$ のとき, $b_1(s) = a \prod_\lambda (s + \lambda)$ とすると, $K = \mathbb{C}$ のとき,

$$Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}}) = a^s \prod_\lambda \frac{\Gamma(s + \lambda)}{\Gamma(\lambda)},$$

$K = \mathbb{R}$ かつ $P_1(x)$ が x に関する多重線形形式であるとき,

$$Z_{\mathbb{R}}(s, \phi_{\mathbb{R}}) = a^{\frac{s}{2}} \prod_\lambda \frac{\Gamma((s + \lambda)/2)}{\Gamma(\lambda/2)}$$

となることが証明されている ([I2, Chapter 6]).

本稿では, 上記の井草氏の結果が一般の $r \geq 1$ について拡張できることを示し, その事実を多変数局所関数等式の導出に役立てることを考えてみることにする.

さて, 上記のような場合に $Z_K(s, \phi_K)$ がガンマ関数の積で書けるということの根拠には, まず $Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}})$, $Z_{\mathbb{R}}(2s, \phi_{\mathbb{R}})$ が, それぞれ $\{\beta_m(s)\}_{m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}}$ をある多項式の組としたときの以下のような差分方程式:

$$F(s+m) = \beta_m(s) F(s) \ (m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}) \tag{1}$$

の一つの有理型関数解となっていることがあげられる. これは青本和彦氏 [Ao] により考察されている差分方程式の特別な場合であり, s が $\mathbb{C}^r$ の適当な無限遠方向にいくときの, その方向に応じたある漸近展開を持つような一意的な有理型関数解が存在することが知られている ([Ao, Théorème 1.2]). そこで原理的には, $Z_K(s, \phi_K)$ の無限遠におけるふるまいが分かれば, $Z_K(s, \phi_K)$ の explicit な表示が得られる, と考えられる.

本稿の第 2 節では, [I2] のアイデアををもとに, (1) の有理型関数解が, $\mathbb{C}^r$ の虚軸方向の無限遠におけるふるまいによって特徴付けられることを証明する. すなわち, $d_1, \cdots, d_r$ をそれぞれ $\beta_{(1,0,\cdots,0)}(s), \cdots, \beta_{(0,\cdots,0,1)}(s)$ の最高次斉次部分の次数, $\sigma_i = \mathrm{Re}(s_i)$, $t_i = \mathrm{Im}(s_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$, $o(1)$ を $|\sum_i d_i t_i| \to \infty$ のとき 0 に収束する無限小とするとき, 恒等的に 0 でない (1) の有理型関数解 $F(s)$ が次のような条件:

定数 $\sigma_{01}, \cdots, \sigma_{0r} \in \mathbb{R}$, および $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ のみに依存する実数値連続関数 $\psi(\sigma)$, $\delta(\sigma)$ があって, $F(s)$ が $D = \{s \in \mathbb{C}^r \mid \sigma_{0i} \leq \sigma_i \leq \sigma_{0i} + 1 \ (i = 1, \cdots, r)\}$ を含むある開領域で正則, かつ,

$$|F(s)| \leq \psi(\sigma) \left|\sum_i d_i t_i\right|^{\delta(\sigma)} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\left|\sum_i d_i t_i\right|\right)(1 + o(1)) \quad \left(\left|\sum_i d_i t_i\right| \to \infty, \ \sigma \in D\right).$$

をみたせば, $F(s)$ はガンマ関数の積により書けることをみる.

第 3 節では, $Z_K(s, \phi_K)$ が上記の条件ををみたすことを示し, その explicit な表示を求めることにする. また最後に, そのことを用いて局所関数等式に関する一つの関係式を導出する.

なお, 上の方法の他に, 藤上雅樹氏によって本稿とは別の証明も得られていることを注記しておく. それについては [F], または本講究録の藤上氏の文章を参照してほしい.

2 多項式係数の差分方程式

各 $m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対して r 変数多項式 $b_m(s) \in \mathbb{C}[s] = \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_r]$ が与えられているとし, 恒等的に 0 でない $\mathbb{C}^r$ の有理型関数 $F(s)$ について次の差分等式

$$F(s+m) = b_m(s) F(s) \ (m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}) \tag{2}$$

が成立しているとする. すると, $\{b_m(s)\}_{m\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}}$ はコサイクル条件

$$b_{m_1+m_2}(s) = b_{m_1}(s) b_{m_2}(s+m_1) \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}) \tag{3}$$

を満たさねばならない. このとき, $b_m(s)$ は次のように一次式の積に分解されることが知られている.

定理 2.1 ([SatoM2, Appendix]) r 変数多項式の組 $\{b_m(s)\}_{m\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}}$ がコサイクル条件 (3) をみたすとき, ある一次形式の組 $e_k(s) = e_{k1}s_1 + \cdots + e_{kr}s_r$ $(e_{k1}, \cdots, e_{kr} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k = 1, \cdots, N$, $e_k \neq e_{k'}$ $(k \neq k'))$, 一変数有理関数の組 $\eta_k(t) = \prod_{i=1}^{d''_k}(t+q_{ki})^{\mu_{ki}} \in \mathbb{C}(t)$ $(\mu_{ki} = \pm 1$, $d'_k = \sum_{i=1}^{d''_k} \mu_{ki} > 0$, $k = 1, \cdots, N)$, および定数 $h_1, \cdots, h_r \in \mathbb{C}^\times$ があって,

(i) 各 $m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対し,

$$b_m(s) = h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r} \prod_{\substack{k=1 \\ e_k(m)\neq 0}}^{N} \prod_{j=0}^{e_k(m)-1} \eta_k(e_k(s)+j).$$

(ii) $\mathrm{G.C.D}(e_{ki})_{\substack{i=1,\cdots,r \\ e_{ki}\neq 0}} = 1 \quad (k = 1, \cdots, N)$.

注意 2.2 各 $\eta_k(t)$ は多項式とは限らない (例えば $r = 2$, $N = 1$, $e_{11} = 2$, $e_{12} = 3$, $\eta_1(t) = t(t+1)^{-1}(t+2)$ のときなど) が, 各 $m \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対して, $e_k(m) \neq 0$ なら $\prod_{j=0}^{e_k(m)-1} \eta_k(t+j)$ は多項式でなければならない. したがって, 例えば, $q_{k1}, \cdots, q_{kd''_k}$ のうち実部が最大のものを q_{ki} とすれば $\mu_{ki} = 1$, などのことはいえる.

さて, 以下 $z \in \mathbb{C}$ に対して z の偏角 $\arg z$ は $-\pi < \arg z \leq \pi$ の範囲でとることにして, $z, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して復素巾 z^α は $z^\alpha = \exp(\alpha(\log|z| + \sqrt{-1}\arg z))$ と主値をとって考えるものとする. そして $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して関数 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = h_1^{s_1} \cdots h_r^{s_r} \prod_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{d''_k} \Gamma(e_k(s)+q_{ki})^{\mu_{ki}}$$

により定めると, $\gamma(s)$ は差分方程式 (2) のひとつの有理型関数解となっている.

以下, $d_i = \sum_{k=1}^{N} e_{ki} d'_k$, $\sigma_i = \mathrm{Re}(s_i)$, $t_i = \mathrm{Im}(s_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$, $o(1)$ を $|\sum_i d_i t_i| \to \infty$ のとき 0 に収束する無限小とする. この節の目的は次の定理を証明することである.

定理 2.3 差分方程式 (2) の恒等的に 0 でない任意の有理型関数解 $F(s)$ について, 定数 $\sigma_{01}, \cdots, \sigma_{0r} \in \mathbb{R}$, および $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ のみに依存する実数値連続関数 $\psi(\sigma)$, $\delta(\sigma)$ があって, $F(s)$ が $D = \{s \in \mathbb{C}^r \mid \sigma_{0i} \leq \sigma_i \leq \sigma_{0i}+1 \ (i = 1, \cdots, r)\}$ を含むある開領域で正則で, しかも

$$|F(s)| \leq \psi(\sigma) \left|\textstyle\sum_i d_i t_i\right|^{\delta(\sigma)} \exp\left(-\tfrac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i d_i t_i\right|\right)(1+o(1)) \quad (|\textstyle\sum_i d_i t_i| \to \infty,\ \sigma \in D)$$

となるならば, $F(s)$ は定数倍を除き $\gamma(s)$ と一致する.

[証明] 仮定より $C(s)=F(s)/\gamma(s)$ は $\mathbb{C}^r$ で正則な, $C(s+m)=C(s)$ $(m\in\mathbb{Z}^r)$ なる周期関数として解析接続される. そこで, $C(s)$ の Fourier 級数展開を

$$C(s)=\sum_{u_1,\cdots,u_r=-\infty}^{\infty}\alpha_{u_1\cdots u_r}\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\textstyle\sum_i u_i s_i\right)$$

とする. 各 $u=(u_1,\cdots,u_r)$ に対して α_u は s によらない数であり,

$$\alpha_u=\exp\left(2\pi\textstyle\sum_i u_i t_i\right)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r}C(s)\exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\textstyle\sum_i u_i\sigma_i\right)d\sigma$$

と書くことができる.

以下, $u=(u_1,\cdots,u_r)\neq(0,\cdots,0)$ のとき $\alpha_u=0$ となることを示し, $C(s)$ が s によらない定数であることを証明することにする. まず上の式より,

$$\begin{aligned}|\alpha_u| &\leq \exp\left(2\pi\textstyle\sum_i u_i t_i\right)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r}|C(s)|d\sigma\\ &= \exp\left(2\pi\textstyle\sum_i u_i t_i\right)\displaystyle\int_{D\cap\mathbb{R}^r}\frac{|F(s)|}{|\gamma(s)|}d\sigma \qquad (4)\end{aligned}$$

となるから, この式の右辺が $t=(t_1,\cdots,t_r)$ のとり方によりいくらでも小さくできることを示せばよい.

$k=1,\cdots,N$ に対し $o_k(1)$ を $|\sum_i e_{ki}t_i|\to\infty$ のとき 0 に収束する無限小とすると, Stirling の公式により (例えば [I2, Section 6.2] を参照)

$$|\Gamma(e_k(s)+q_{kj})|=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left|\textstyle\sum_i e_{ki}t_i\right|^{\sum_i e_{ki}\sigma_i+\mathrm{Re}(q_{kj})-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i e_{ki}t_i\right|\right)(1+o_k(1))$$
$$\left(\left|\textstyle\sum_i e_{ki}t_i\right|\to\infty,\sigma\in D\right)$$

を得る. そこで, $u\neq(0,\cdots,0)$ に対し $\sum_i c_i(2\pi u_i+\arg h_i)\neq 0$ となる適当な正の数 $c_1,\cdots,c_r\in\mathbb{R}_{>0}$ をとり, $t=(c_1,\cdots,c_r)t_0$ $(t_0\in\mathbb{R})$ とすると, ある σ の実数値連続関数 $\psi'(\sigma)$ (>0), $\delta'(\sigma)$ があって

$$|\gamma(s)|=\exp\left(-t_0\textstyle\sum_i c_i\arg h_i\right)\psi'(\sigma)|t_0|^{\delta'(\sigma)}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i c_i d_i\right||t_0|\right)(1+o(1))$$
$$(|t_0|\to\infty,\ \sigma\in D)$$

となることが分かる. 一方このとき,

$$|F(s)|\leq\psi(\sigma)\left|\textstyle\sum_i c_i d_i\right|^{\delta(\sigma)}|t_0|^{\delta(\sigma)}|\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i c_i d_i\right||t_0|\right)(1+o(1))\quad(|t_0|\to\infty,\ \sigma\in D)$$

である. したがって (4) 式より, ある定数 $M,\delta_0>0$ があって

$$|\alpha_u|\leq\exp\left(t_0\textstyle\sum_i c_i(2\pi u_i+\arg h_i)\right)|t_0|^{\delta_0}M(1+o(1))\quad(|t_0|\to\infty,\ \sigma\in D)$$

となる. ここで, $\exp\left(t_0\sum_i c_i(2\pi u_i+\arg h_i)\right)\to 0$ となる方向で $|t_0|\to\infty$ とすれば, 右辺は 0 に収束する. 故に $\alpha_u=0$ であることがわかる.

以上より, $C(s)$ が s によらない定数, したがって $F(s)$ は定数倍を除き $\gamma(s)$ と一致することがいえた. □

3　局所ゼータ関数の計算

3.1　$K = \mathbb{C}$ の場合

まずは $K = \mathbb{C}$ として

$$Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}}) = \int_V |P_1(x)|_{\mathbb{C}}^{s_1} \cdots |P_r(x)|_{\mathbb{C}}^{s_r} \exp(-\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}) dx$$

を考えることにする. なお, 以下 dx は常に

$$\int_V \exp(-2\pi\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}) dx = 1$$

となるように正規化したものを考えているものとする.　$Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}})$ の右辺の積分は $\mathrm{Re}(s_1) > 0, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > 0$ なる範囲で収束して s に関する正則関数となる.

さて, 第 1 節における $b_m(s)$ はコサイクル条件 (3) を満たすから, 定理 2.1 のように一次式の積に分解できる. また,

$$\begin{aligned} P_1^*(\partial_x)^{m_1} \cdots P_r^*(\partial_x)^{m_r} &[|P_1(x)|_{\mathbb{C}}^{s_1} \cdots |P_r(x)|_{\mathbb{C}}^{s_r} P_1(x)^{m_1} \cdots P_r(x)^{m_r}] \\ &= b_m(s) |P_1(x)|_{\mathbb{C}}^{s_1} \cdots |P_r(x)|_{\mathbb{C}}^{s_r} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r), \end{aligned}$$

それから $d_i = \sum_k e_{ki} d'_k = \deg P_i \ (i = 1, \cdots, r)$ より,

$$P_i^*(\partial_x) \exp(-\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}) = (-1)^{d_i} \overline{P_i(x)} \exp(-\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}) \quad (i = 1, \cdots, r)$$

だから, 部分積分により,

$$Z_{\mathbb{C}}(s + m, \phi_{\mathbb{C}}) = b_m(s) Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}}) \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r)$$

を得る. これにより $Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}})$ は $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される. とくに $s = 0$ での値は

$$Z_{\mathbb{C}}(0, \phi_{\mathbb{C}}) = \int_V \exp(-\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}) dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

である. そしてここで, $Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}})$ は次のようにガンマ関数の積により explicit に書かれることが証明される.

定理 3.1

$$Z_{\mathbb{C}}(s, \phi_{\mathbb{C}}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} h_1^{s_1} \cdots h_r^{s_r} \prod_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{d''_k} \left(\frac{\Gamma(e_k(s) + q_{ki})}{\Gamma(q_{ki})} \right)^{\mu_{ki}}.$$

[証明] $l=l(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathbb{C}}}$, $x=lu$ とすると, ある定数 $\alpha>0$ があって $dx=\alpha l^{2n-1}dldu$ となる. また, $i=1,\cdots,r$ について, $P_i(x)$ は斉次式だから, $|P_i(lu)|_{\mathbb{C}}^{s_i}=l^{2d_is_i}|P_i(u)|_{\mathbb{C}}^{s_i}$ となる. よって $\mathrm{Re}(s_1)>0,\cdots,\mathrm{Re}(s_r)>0$ なる範囲で

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{C}}(s,\phi_{\mathbb{C}}) &= \int_V |P_1(x)|_{\mathbb{C}}^{s_1}\cdots|P_r(x)|_{\mathbb{C}}^{s_r}\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{C}})dx \\ &= \alpha\int_0^\infty l^{2\sum_i d_is_i+2n-1}\exp(-l^2)dl\int_{l(u)=1}|P_1(u)|_{\mathbb{C}}^{s_1}\cdots|P_r(u)|_{\mathbb{C}}^{s_r}du \end{aligned}$$

とかける. ここで

$$\psi(s)=\frac{\alpha}{2}\int_{l(u)=1}|P_1(u)|_{\mathbb{C}}^{s_1}\cdots|P_r(u)|_{\mathbb{C}}^{s_r}du$$

とおき, $\nu=l^2$ と変数変換すれば $2ldl=d\nu$ で,

$$Z_{\mathbb{C}}(s,\phi_{\mathbb{C}})=\psi(s)\int_0^\infty \nu^{\sum_i d_is_i+n-1}\exp(-\nu)d\nu=\psi(s)\Gamma\left(\textstyle\sum_i d_is_i+n\right)$$

を得る. したがって Stirling の公式により

$$\begin{aligned} |Z_{\mathbb{C}}(s,\phi_{\mathbb{C}})| &\leq \psi(\sigma)|\Gamma\left(\textstyle\sum_i d_is_i+n\right)| \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}}\psi(\sigma)\left|\textstyle\sum_i d_it_i\right|^{\sum_i d_i\sigma_i+n-\frac{1}{2}}\exp\left(-\tfrac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i d_it_i\right|\right)(1+o(1)) \\ &\qquad (|\textstyle\sum_i d_it_i|\to\infty, 1\leq\sigma_i\leq 2\ (i=1,\cdots,r)) \end{aligned}$$

となることがわかる. よって, 定理 2.3 により, 上記の結果を得る. □

この定理を用いれば $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式は完全に決定することができる. 今, (G,V) が正則概均質ベクトル空間, したがって, $g\in G$ に対して $P_1(g\cdot x)^{2\kappa_1}\cdots P_r(g\cdot x)^{2\kappa_r}=(\det g)^2P_1(x)^{2\kappa_1}\cdots P_r(x)^{2\kappa_r}$ となるような半整数の組 $\kappa_1,\cdots,\kappa_r\in(1/2)\mathbb{Z}_{>0}$ が存在するものとする. また, V とその双対空間 V^* は内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ により同一視しているものとして, $\Phi\in\mathcal{S}(V)$ に対し Fourier 変換 $\hat{\Phi}\in\mathcal{S}(V^*)$ を

$$\hat{\Phi}(y)=\int_V\Phi(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}(\langle x,\bar{y}\rangle_{\mathbb{C}}+\langle\bar{x},y\rangle_{\mathbb{C}}))dx$$

により定める. それから (G,V) は簡約可能概均質ベクトル空間だから, 双対空間 (G^*,V^*) の基本相対不変式 $P_1^*,\cdots,P_r^*$ を, $P_i(\partial_x)\exp(\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}})=\overline{P_i^*(y)}\exp(\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}})$ $(i=1,\cdots r)$, また各 $m=(m_1,\cdots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対し,

$$P_1(\partial_x)^{m_1}\cdots P_r(\partial_x)^{m_r}[P_1^*(x)^{s_1+m_1}\cdots P_r^*(x)^{s_r+m_r}]=b_m(s)P_1^*(x)^{s_1}\cdots P_r^*(x)^{s_r}$$

となるようにとることができる. なお, 上記の $b_m(s)$ は第 1 節と同じものである.

さて, $\Phi^*\in\mathcal{S}(V^*)$ について, 双対空間の局所ゼータ関数 $Z_{\mathbb{C}}^*(s,\Phi^*)$ を

$$Z_{\mathbb{C}}^*(s,\Phi^*)=\int_{V^*}|P_1^*(y)|_{\mathbb{C}}^{s_1}\cdots|P_r^*(y)|_{\mathbb{C}}^{s_r}\Phi^*(y)dy$$

により定める．$Z_{\mathbb{C}}(s,\Phi)$, $Z^*_{\mathbb{C}}(s,\Phi^*)$ は $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続されるが，このとき $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ とすれば，ある有理型関数 $c(s)$ が存在して

$$Z^*_{\mathbb{C}}(s-\kappa,\hat{\Phi})=c(s)Z_{\mathbb{C}}(-s,\Phi) \quad (\Phi\in\mathcal{S}(V))$$

なる関数等式が成立する ([SatoM1, 第 3 章])．この $c(s)$ は [SatoM1, 定理 7] においては符号を除いて得られていたわけであるが，定理 3.1 を用いれば，次のように符号をこめて決定される．

系 3.2

$$c(s)=\prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{2s_i-\kappa_i}\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{d''_k}\left(\frac{\Gamma(e_k(s-\kappa)+q_{kj})}{\Gamma(-e_k(s)+q_{kj})}\right)^{\mu_{kj}}.$$

[証明] $\Phi(x)=\exp(-2\pi\langle x,x\rangle_{\mathbb{C}})$ とすると $\hat{\Phi}=\Phi$ だから，定理 3.1 を用いて関数等式の両辺を計算すれば良い． □

3.2 $K=\mathbb{R}$ の場合

次に $K=\mathbb{R}$ として

$$Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})=\int_{V_{\mathbb{R}}}|P_1(x)|^{s_1}\cdots|P_r(x)|^{s_r}\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})dx$$

を考えることにする．なお，以下 dx は常に

$$\int_{V_{\mathbb{R}}}\exp(-\pi\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})dx=1$$

となるように正規化してあるものを考えることとする． $Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})$ の右辺の積分は $\mathrm{Re}(s_1)>0,\cdots,\mathrm{Re}(s_r)>0$ なる範囲で収束して s に関する正則関数となる．$K=\mathbb{C}$ のときと同様，第 1 節における $b_m(s)$ は定理 2.1 のように一次式の積に分解できる．また，

$$\begin{aligned}P_1^*(\partial_x)^{m_1}\cdots P_r^*(\partial_x)^{m_r}&[|P_1(x)|^{s_1}\cdots|P_r(x)|^{s_r}P_1(x)^{m_1}\cdots P_r(x)^{m_r}]\\&=b_m(s)|P_1(x)|^{s_1}\cdots|P_r(x)|^{s_r}\quad(m\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0})\end{aligned}$$

となることもすぐにわかる．

以下，各 $P_i(x)$ は x に関して多重線形形式になっているものと仮定する．このとき $d_i=\sum_k e_{ki}d'_k=\deg P_i$ $(i=1,\cdots,r)$ より，

$$P_i^*(\partial_x)\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})=(-2)^{d_i}P_i(x)\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})\quad(i=1,\cdots,r)$$

が成立する．したがって, $\mathbb{Z}^r$ の標準基底を $E_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,E_r=(0,\cdots,0,1)$ とおくと, 部分積分により,

$$Z_{\mathbb{R}}(s+2E_i,\phi_{\mathbb{R}})=2^{-d_i}b_{E_i}(s)Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})\quad(i=1,\cdots,r) \tag{5}$$

が成り立つ．これにより $Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})$ は $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される．とくに $s=0$ での値は

$$Z_{\mathbb{R}}(0,\phi_{\mathbb{R}})=\int_{V_{\mathbb{R}}}\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})dx=\pi^{\frac{n}{2}}$$

である．また, 次の補題が成り立つ．

補題 3.3 各 $P_i(x)$ が x に関する多重線形形式ならば,

(i) $b_{E_i}(s)b_{E_j}(s+2E_i)=b_{E_i}(s+2E_j)b_{E_j}(s)$ $(i,j=1,\cdots,r)$,

(ii) $e_{ki}=0$ or 1 $(k=1,\cdots,N,\ i=1,\cdots,r)$.

[証明] (i) これは (5) からただちに従う．

(ii) 各 $k=1,\cdots,N$ に対し, $e_{ki},e_{kj}>0$ なる i,j を任意にとる．このとき (i) の, 一次形式の部分が $e_k(s)$ となる因子に注目すると,

$$\begin{aligned}&\prod_{u=1}^{d''_k}\prod_{v=0}^{e_{ki}-1}(e_k(s)+q_{ku}+v)^{\mu_{ku}}\prod_{u=1}^{d''_k}\prod_{v=0}^{e_{kj}-1}(e_k(s)+q_{ku}+2e_{ki}+v)^{\mu_{ku}}\\ =&\prod_{u=1}^{d''_k}\prod_{v=0}^{e_{ki}-1}(e_k(s)+q_{ku}+2e_{kj}+v)^{\mu_{ku}}\prod_{u=1}^{d''_k}\prod_{v=0}^{e_{kj}-1}(e_k(s)+q_{ku}+v)^{\mu_{ku}}\end{aligned}$$

を得る．ここで $q_{k1},\cdots,q_{kd''_k}$ のうち実部が最大のものを q_k とおくと, 左辺にでてくる一次式たちのうち定数項の実部が最大のものは, $(e_k(s)+q_k+2e_{ki}+e_{kj}-1)$ であり, 右辺のそれは $(e_k(s)+q_k+2e_{kj}+e_{ki}-1)$ である．注意 2.2 より, この両者は一致していなければならない．したがってこのとき $e_{ki}=e_{kj}$ である．

よって, $e_{k1},\cdots,e_{kr}$ のうち 0 でないものはすべて一致する．ところが定理 2.1(ii) より 0 でないものの最大公約数は 1 になるのだから, それらはすべて 1 になる． $\square$

そこで, $Z(s)=Z_{\mathbb{R}}(2s,\phi_{\mathbb{R}})$ とし,

$$B_m(s)=h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r}\prod_{\substack{k=1\\ e_k(m)\neq 0}}^{N}\prod_{i=1}^{d''_k}\prod_{j=0}^{e_k(m)-1}(e_k(s)+\frac{q_{ki}}{2}+j)\quad(m=(m_1,\cdots,m_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0})$$

とおくと, $Z(s)$ は差分等式 $Z(s+m)=B_m(s)Z(s)$ をみたす．ここで, 次の定理が証明される．

定理 3.4 $P_1(x),\cdots,P_r(x)$ が x に関する多重線形形式ならば,

$$Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})=\pi^{\frac{n}{2}}h_1^{\frac{s_1}{2}}\cdots h_r^{\frac{s_r}{2}}\prod_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{d''_k}\frac{\Gamma((e_k(s)+q_{ki})/2)}{\Gamma(q_{ki}/2)}.$$

[証明] $l=l(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}}$, $x=lu$ とすると, ある定数 $\alpha>0$ があって $dx=\alpha l^{n-1}dldu$ となる. よって $K=\mathbb{C}$ のとき同様, $\mathrm{Re}(s_1)>0,\cdots,\mathrm{Re}(s_r)>0$ なる範囲で

$$\begin{aligned}Z(s)&=\int_{V_{\mathbb{R}}}|P_1(x)|^{2s_1}\cdots|P_r(x)|^{2s_r}\exp(-\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})dx\\&=\alpha\int_0^\infty l^{2\sum_i d_is_i+n-1}\exp(-l^2)dl\int_{l(u)=1}|P_1(u)|^{2s_1}\cdots|P_r(u)|^{2s_r}du\end{aligned}$$

とかける. ここで

$$\psi(s)=\frac{\alpha}{2}\int_{l(u)=1}|P_1(u)|^{2s_1}\cdots|P_r(u)|^{2s_r}du$$

とおき, $\nu=l^2$ と変数変換すれば $2ldl=d\nu$ で,

$$Z(s)=\psi(s)\int_0^\infty\nu^{\sum_i d_is_i+\frac{n}{2}-1}\exp(-\nu)d\nu=\psi(s)\Gamma\left(\textstyle\sum_i d_is_i+\frac{n}{2}\right)$$

を得る. したがって Stirling の公式により

$$\begin{aligned}|Z(s)|&\leq\psi(\sigma)|\Gamma\left(\textstyle\sum_i d_is_i+\frac{n}{2}\right)|\\&=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\psi(\sigma)\left|\textstyle\sum_i d_it_i\right|^{\sum_i d_i\sigma_i+\frac{n-1}{2}}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left|\textstyle\sum_i d_it_i\right|\right)(1+o(1))\\&\qquad\qquad(|\textstyle\sum_i d_it_i|\to\infty,1\leq\sigma_i\leq2\ (i=1,\cdots,r))\end{aligned}$$

となることがわかる. よって, 定理 2.3 および $Z_{\mathbb{R}}(s,\phi_{\mathbb{R}})=Z(s/2)$ より, 上記の結果を得る. □

ここで, $G_{\mathbb{R}}$ を G の $\mathbb{R}$ 有理点全体とし, $G_{\mathbb{R}}^{\circ}$ を, 単位元を含む $G_{\mathbb{R}}$ の連結成分, $G_{\mathbb{R}}^{+}$ を, $G_{\mathbb{R}}^{\circ}$ を含むような $G_{\mathbb{R}}$ の部分群とする. このとき (G,V) の開軌道 Y について, Y の $\mathbb{R}$ 有理点全体 $Y_{\mathbb{R}}$ は有限個の $G_{\mathbb{R}}^{+}$ 軌道に分かれることが知られている. それらを $Y_1,\cdots,Y_l$ とおく ($Y_{\mathbb{R}}=Y_1\cup\cdots\cup Y_l$). このとき各 Y_i における局所ゼータ関数 $Z_{Y_i}(s,\Phi)$ を

$$Z_{Y_i}(s,\Phi)=\int_{Y_i}|P_1(x)|^{s_1}\cdots|P_r(x)|^{s_r}\Phi(x)dx\quad(i=1,\cdots,l)$$

により定める. 各 $Z_{Y_i}(s,\Phi)$ も $Z_{\mathbb{R}}(s,\Phi)$ 同様 $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される. また, 部分積分により $Z_i(s)=Z_{Y_i}(2s,\phi_{\mathbb{R}})$ も差分等式 $Z_i(s+m)=B_m(s)Z_i(s)$ を満たす. 従って上記の定理と同様にして次が成立する.

定理 3.5 $P_1(x),\cdots,P_r(x)$ が x に関する多重線形形式ならば, $i=1,\cdots,l$ について, $\alpha_i=Z_{Y_i}(0,\phi_{\mathbb{R}})$ とすると,

$$Z_{Y_i}(s,\phi_{\mathbb{R}})=\alpha_i h_1^{\frac{s_1}{2}}\cdots h_r^{\frac{s_r}{2}}\prod_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{d_k''}\frac{\Gamma((e_k(s)+q_{ki})/2)}{\Gamma(q_{ki}/2)}.$$

さて, (G,V) が正則概均質ベクトル空間, (G^*,V^*) がその双対概均質ベクトル空間であるとして, $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$, $P_1^*,\cdots,P_r^*$ を $K=\mathbb{C}$ のときと同様にとる. また, $V_{\mathbb{R}}$ とその双対空間 $V_{\mathbb{R}}^*$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$ により同一視しているものとして, $\Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し Fourier 変換 $\hat{\Phi}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ を

$$\hat{\Phi}(y)=\int_{V_{\mathbb{R}}}\Phi(x)\exp(\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}})dx$$

により定める.

(G^*,V^*) の開軌道 Y^* に対して $Y_1^*,\cdots,Y_r^*$ を $Y_1,\cdots,Y_r$ と同様にとり, $\Phi^*\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ について各 $Z_{Y_i^*}^*(s,\Phi^*)$ を

$$Z_{Y_i^*}^*(s,\Phi^*)=\int_{Y_i^*}|P_1^*(x)|^{s_1}\cdots|P_r^*(x)|^{s_r}\Phi^*(x)dx\quad(i=1,\cdots,l)$$

により定める. このとき, ある有理型関数の組 $c_{ij}(s)$ $(i,j=1,\cdots,l)$ が存在して

$$Z_{Y_i^*}^*(s-\kappa,\hat{\Phi})=\sum_{j=1}^{l}c_{ij}(s)Z_{Y_i}(-s,\Phi)\quad(\Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\ i=1,\cdots,l)$$

なる関数等式が成立する ([SatoF, Lemma 5.5]). ここで, $\Phi(x)=\exp(-\pi\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}})$ とすると $\hat{\Phi}=\Phi$ となるから, 定理 3.5 の結果を用いれば, この $c_{ij}(s)$ たちについて, 次のような関係式が成立することがいえる.

系 3.6 $P_1(x),\cdots,P_r(x)$ が x に関する多重線形形式であるとする. このとき $i=1,\cdots,l$ について $\alpha_i=Z_{Y_i}(0,\exp(-\pi\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}))$, $\alpha_i^*=Z_{Y_i^*}^*(0,\exp(-\pi\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}))$ とすると,

$$\alpha_1c_{i1}(s)+\cdots+\alpha_lc_{il}(s)=\alpha_i^*\prod_{u=1}^{r}(\pi^{-d_uh_u})^{s_u-\frac{\kappa_u}{2}}\prod_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{d_k''}\frac{\Gamma((e_k(s-\kappa)+q_{kj})/2)}{\Gamma((-e_k(s)+q_{kj})/2)}.$$

参考文献

[Ao] K. Aomoto, *"Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes"*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 22 (1975), 271–297.

[Am] 天野勝利, “多変数局所関数等式の b-関数による具体的表示”, 筑波大学修士論文, 2001.

[F] 藤上雅樹, “概均質ベクトル空間における多変数局所関数等式の Γ-因子について”, 筑波大学修士論文, 2001.

[I1] J. Igusa, *“On functional equations of complex powers”*, Invent. math. 85 (1986), 1–29.

[I2] J. Igusa, *“An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions”*, Studies in Advanced Mathematics 14, AMS/IP, 2000.

[SatoF] F. Sato, *“Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations”*, Tôhoku Math. Journ. 34 (1982), 437–483.

[SatoM1] 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, “概均質ベクトル空間の理論”, 数学の歩み 15-1 (1970), 85–157.

[SatoM2] M. Sato, note by T. Shintani, translated by M. Muro, *“Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note”*, Nagoya Math. J. Vol. 120 (1990), 1–34.

[Si] C. L. Siegel, *“Über die analytische Theorie der quadratischen Formen”*, Ann. Math. Vol. 36, No. 3 (1935), 527–606.