D-加群代数の Picard-Vessiot 理論

2008年12月18日, 筑波大学数学系談話会

天野勝利 (筑波大学数理物質科学研究科)

概略

1. Picard-Vessiot 理論とは？
   (線形常微分, 差分類似)
2. Hopf 代数とは？
3. D-加群代数の PV 理論 (A. and 増岡)

1. Picard-Vessiot 理論とは？

1.1. 線形常微分 PV 理論

$$(A,\partial) \text{ が differential ring} :\Leftrightarrow \begin{cases} A: \text{ comm. ring}, \\ \partial : A \to A \quad \text{additive}, \\ \partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \\ \qquad \text{for } {}^{\forall}a, b \in A. \end{cases}$$

$A^{\partial} := \{a \in A \mid \partial(a) = 0\}$ 定数環 (constants)

<u>例.</u> $K = \mathbb{R}(x)$, $\partial = \dfrac{d}{dx} \Rightarrow K$ は differential field.

K 上で線形常微分方程式 $(\partial^2 + 1)y = 0$ (y は未知関数) を考える.

$$\begin{array}{ccc} \text{解空間} & & \text{splitting field} \\ \mathbb{R}\sin x + \mathbb{R}\cos x & \hookrightarrow & \mathbb{R}(x, \sin x, \cos x) =: L \end{array}$$

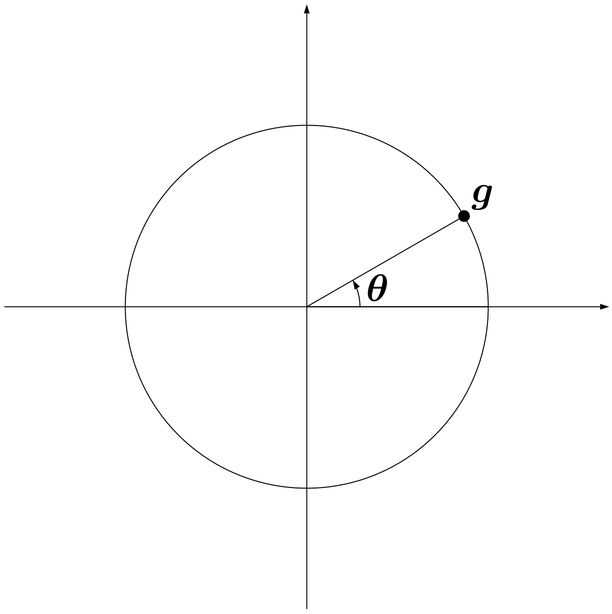
$\Rightarrow L/K$ は PV 拡大 (Galois 拡大に相当する概念).

微分 Galois 群

$$\begin{aligned} G(L/K) &:= \mathrm{Aut}_{\partial}(L/K) \\ &= \{g : L \to L \ (K \text{ 上 auto.}) \mid g \circ \partial = \partial \circ g\}. \end{aligned}$$

一般に, 微分 Galois 群は定数体 (この場合 $L^{\partial} = K^{\partial} = \mathbb{R}$) 上の代数群の構造をもつ.

この場合 $G(L/K) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (circle group).



$$g: \begin{array}{l} \sin x \mapsto \sin(x+\theta) \\ \cos x \mapsto \cos(x+\theta) \end{array}$$

Galois 対応

(中間 differential fields) (closed subgroups)

$$\begin{array}{ccc}
L & \longleftrightarrow & \{1\} \\
| & & | \\
\mathbb{R}(x, \sin(nx), \cos(nx)) & \longleftrightarrow & \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z} \text{ (円の } n \text{ 等分点)} \\
| & & | \\
K & \longleftrightarrow & G(L/K)
\end{array}$$

<u>**例.**</u> $K = \mathbb{C}(x)$, $\partial = \dfrac{d}{dx}$

$$(x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\partial - \alpha\beta)y = 0$$
$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = (x - \frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y_2 = y_1 w, \quad w = \int (x - \frac{1}{2})^{-2}(x-1)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

解空間 splitting field

$$\mathbb{C}y_1 + \mathbb{C}y_2 \hookrightarrow \mathbb{C}(\sqrt{x-1}, \sqrt{x}, w) =: L$$

$\Rightarrow L/K$ **は** PV **拡大**

$$G(L/K) \simeq \left\{ g = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} c_1^2 = 1 \\ c_2^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$g: \begin{array}{rcl} \sqrt{x-1} & \mapsto & c_1\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x} & \mapsto & c_2\sqrt{x} \\ w & \mapsto & c_1 c_2 w + c_1 c_3 \end{array}$$

1.2. 差分 PV 理論 (van der Put-Singer, 1997)

$$(A,\tau)\ \text{が difference ring} :\Leftrightarrow \begin{cases} A:\ \text{comm. ring}, \\ \tau : A \to A \quad \text{ring auto.} \end{cases}$$

$A^\tau := \{a \in A \mid \tau(a) = a\}$ 定数環 (constants)

<u>例.</u> $K = \mathbb{C}(s)$, $\tau : f(s) \mapsto f(s+1)$ とする.

K 上で線形常差分方程式 $(\tau - s)y = 0$ (y は未知関数) を考える.

$$\begin{array}{ccc} \text{解空間} & & \text{splitting field} \\ \mathbb{C}\Gamma(s) & \hookrightarrow & \mathbb{C}(s,\Gamma(s)) =: L \end{array} \Rightarrow L/K \text{ は PV 拡大.}$$

差分 Galois 群

$$\begin{aligned} G(L/K) &:= \mathrm{Aut}_\tau(L/K) \\ &= \{g : L \to L\ (K\ \text{上 auto.}) \mid g \circ \tau = \tau \circ g\}. \end{aligned}$$

この場合, $G(L/K) \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$.

$$\mathbb{C}^\times \ni c : \Gamma(s) \mapsto c\Gamma(s).$$

しかし, 今の例のように「差分体の拡大」ではうまくいかないことがある (次の例)

例. $K=\mathbb{C}$, $\tau=\mathrm{id}_K$ とする.

Fibonacci 漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を考える ($\tau: a_n \mapsto a_{n+1}$).

$$\alpha=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}, \beta=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \in (\text{数列の環})$$

とすれば, 2 次元の解空間 $\mathbb{C}\alpha+\mathbb{C}\beta$ を得る.

しかし, この解空間を含む difference field は存在しない:

$$\alpha\beta=\{(-1)^n\}, \quad (\alpha\beta+1)(\alpha\beta-1)=(\alpha\beta)^2-1=0.$$

そこで, 零因子を許した difference algebra を使って PV 拡大を構成する.

$$L=\mathbb{C}(\alpha)\times\mathbb{C}(\alpha)\ni(a,b), \qquad \tau(a,b)=(\tau b,\tau a).$$

すると,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\alpha+\mathbb{C}\beta &\hookrightarrow L \\ \alpha &\mapsto (\alpha,\alpha) \\ \beta &\mapsto (\alpha^{-1},-\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

$$G(L/K):=\mathrm{Aut}_\tau(L/K)\simeq\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C})\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Galois 対応

(良い性質を満たす
中間 difference algebra)　　(closed subgroups)

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{L} & \longleftrightarrow & \{1\} \\
| & & | \\
\mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}) \\
| & & | \\
\boldsymbol{K} & \longleftrightarrow & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K})
\end{array}$$

<u>要求.</u> (1) 微分・差分作用素を統一的に扱いたい

→ <u>余可換な Hopf 代数 D</u>

(2) 上記の $L/(\mathbb{C}\times\mathbb{C})$ も PV 拡大と呼びたい, etc.

それには, L や $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ のような, 体ではないがそれに準ずるような良い algebra のクラスを定式化したい.

→ <u>アルチン単純 (AS) D-加群代数</u>

2. Hopf 代数とは？

k を体とし, 以下すべて k 上で考える.

A : algebra と algebra map $\Delta : A \to A \otimes_k A$, $\varepsilon : A \to k$ と anti-algebra map $S : A \to A$ があって, 次の (1)–(3) を満たすとき, $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ を Hopf 代数という.

(1) 次が可換:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\Delta} \\ A \otimes A & \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} & A \otimes A \otimes A \end{array}$$

(2) 次も可換:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\sim"] & \\ k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & A \otimes k \end{tikzcd}$$

(3) $a \in A$ に対して $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$ と書くとき,
$\sum S(a_1)a_2 = \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a) \quad ({}^\forall a \in A)$.

※ $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$ という記法は sigma notation と呼ばれ, よく用いられる.

※ Δ は余積 (coproduct), ε は余単位射 (counit), S は antipode と呼ばれる.

例. (affine group scheme の座標環)

A が可換 Hopf 代数 のとき, $\mathbb{G} = \operatorname{Spec} A$ として, Δ, ε, S に対応する scheme morphism

$\Delta^* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $\varepsilon^* : \{1\} \to \mathbb{G}$, $S^* : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$

を考えて可換図式を書き換えてみると, これらがそれぞれ群の積, 単位元, 逆元を与える morphism として群の公理を満たしていることがわかる. だから, affine group scheme と可換 Hopf 代数とは同等な概念である.

例. (余可換な Hopf 代数の代表例)

Hopf 代数 A が, $\sum a_1 \otimes a_2 = \sum a_2 \otimes a_1$ $({}^\forall a \in A)$ を満たすとき, 余可換という. (A が可換かつ余可換なら $\operatorname{Spec} A$ は abelian group scheme となる.)

(1) G : 任意の群, $A = kG$ (群環) とし, Δ, ε, S を $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ となるように定めると, A は余可換な Hopf 代数になる. (特に $G = \mathbb{Z}$ のとき, A は定数係数の差分作用素環と同一視できる.)

(2) $\mathfrak{g}$: 任意の Lie 環, $A = U(\mathfrak{g})$ とし, Δ, ε, S を $h \in \mathfrak{g}$ に対して $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$, $\varepsilon(h) = 0$, $S(h) = -h$ となるように定めると, A は余可換な Hopf 代数になる.

3. D-加群代数の PV 理論

3.1. 作用素の環

k : base field (以下すべて k 上で考える)

D : 余可換な Hopf algebra

$$A \text{ が (左) } D\text{-加群代数} :\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ は algebra}, \\ (\text{左})\ D\text{-加群構造 } D \otimes_k A \to A, \\ d(ab) = \sum (d_1 a)(d_2 b),\ d \cdot 1 = \varepsilon(d)1 \\ \qquad \text{for } {}^\forall d \in D,\ {}^\forall a, b \in A. \end{cases}$$

このとき $A \otimes_k D$ に次のような semi-direct な積を入れて algebra とみたものを $A\#D$ と書いて, smash 積と呼ぶ:

$$(a \otimes d) \cdot (a' \otimes d') = \sum a(d_1 a') \otimes d_2 d'.$$

以下, $A\#D$ の元を $a\#d$ のように書くことがある.

V を D-加群とするとき,

$$V^D := \{v \in V \mid dv = \varepsilon(d)v \ ({}^\forall d \in D)\}$$

を V の constants と呼ぶ.

例. (1) $\mathrm{ch}(k)=0$, $D=k[\partial]$

$\Delta(\partial)=\partial\otimes 1+1\otimes\partial$, $\varepsilon(\partial)=0$, $S(\partial)=-\partial$

このとき,

A が可換 D-加群代数 $\Leftrightarrow$ A は differential algebra.

実際, A が D-加群代数なら,

$$\partial(ab)=(\partial a)b+a(\partial b)\quad (a,b\in A).$$

さらに, 例えば $A=k[x]$ (多項式環), $\partial f=\dfrac{df}{dx}$ のとき, $A\#D$ はいわゆる Weyl 代数 (多項式係数の線形微分作用素環) と同じものになる. 一般に, K が可換 D-加群代数なら,

$$K\#D=\text{“}K\ \text{係数の線形微分作用素環”}$$

と思える.

(2) $D=k[\tau,\tau^{-1}]$

$\Delta(\tau)=\tau\otimes\tau$, $\varepsilon(\tau)=1$, $S(\tau)=\tau^{-1}$

このとき,

A が可換 D-加群代数 $\Leftrightarrow$ A は difference algebra.

実際, A が D-加群代数なら,

$$\tau(ab)=(\tau a)(\tau b)\quad (a,b\in A).$$

テンソル積について.

K : 可換 D-加群代数のとき, ${}_{K\#D}\mathcal{M}$ を $K\#D$-加群の圏とすると, $V, W \in {}_{K\#D}\mathcal{M}$ に対し, $V \otimes_K W$ に

$$(a\#d)(v \otimes w) = a \sum d_1 v \otimes d_2 w$$

によって $K\#D$-加群構造を入れることができ, $V \otimes_K W \in {}_{K\#D}\mathcal{M}$ となる.

これにより $({}_{K\#D}\mathcal{M}, \otimes_K)$ は (symmetric) tensor category になる.

仮定. 次の節に進む前に次を仮定しておく.

(i) D は pointed ($\Rightarrow D = D^1\#kG$).

ここで, $\begin{cases} D^1 \text{ は } 1 \text{ を含む } D \text{ の irreducible component,} \\ G = G(D) : \text{grouplike elements からなる群} \end{cases}$

(ii) D^1 は Birkhoff-Witt bialgebra (higher derivation を一般化したようなもの) になっている.

なお, k が標数 0 の代数閉体ならばこれらは常に成立する.

3.2. アルチン単純 (AS) D-加群代数

以下, D-加群代数はすべて可換代数とする.

定義. K : D-加群代数のとき,

- K が単純 $:\Leftrightarrow$ K に non-trivial な D-stable ideal が存在しない

  ($\Leftrightarrow$ K が ${}_{K\#D}\mathcal{M}$ の simple object).
- K がアルチン単純 (AS) $:\Leftrightarrow$ K がアルチン環かつ単純.

命題. K が AS D-加群代数のとき,

(1) K^D は体.

(2) $K = \prod_{g \in G/G_1} K_g$ (体の直積), 各 K_g はすべて体同型. ここで, $G = G(D)$ は D の grouplike element 全体からなる群で, G_1 は, K の素 ideal P を一つ fix したときに $G_1 = \{g \in G | gP = P\}$ により定まる G の部分群. このとき $[G : G_1] < \infty$.

(3) $D(G_1) := D^1 \# kG_1$, $K_1 = K_{1G_1}$ とすると,

$$ {}_{K_1\#D(G_1)}\mathcal{M} \xrightarrow{\approx} {}_{K\#D}\mathcal{M} \quad \text{(Abel 圏同値)}. $$

特に, ${}^{\forall}V \in {}_{K\#D}\mathcal{M}$ は自由 K-加群.

例えば, (3) により §2 の $(\mathbb{C}(\alpha) \times \mathbb{C}(\alpha))/(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}(\alpha)/\mathbb{C}$ と同一視できる. ($G \simeq \mathbb{Z}$, $G_1 \simeq 2\mathbb{Z}$.)

3.3. PV 拡大と splitting algebra

定義. (1) L/K : AS D-加群代数の拡大が PV 拡大とは,

(a) $L^D = K^D$,

(b) $L \supset {}^{\exists}A$: 部分 D-加群代数

$$\text{s.t.} \begin{cases} A \supset K, \\ L \text{ は } A \text{ の total quotient ring}, \\ A \otimes_K A = A \cdot (A \otimes_K A)^D \end{cases}$$

※このとき, 上記の A は L/K に対して一意的.

(2) K : AS D-加群代数, $V \in {}_{K\#D}\mathcal{M}$, ${}_K V < \infty$ とする. L が V の (minimal) splitting algebra とは,

$$\begin{cases} L \text{ は } K \text{ を含む AS } D\text{-加群代数}, \\ \dim_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) = \mathrm{rank}_K V, \\ L \text{ の真部分 AS } D\text{-加群代数で上記２条件を満たすものはない}. \end{cases}$$

※ $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ は L の中における V の解全体を表しており, その L^D 上の次元が V の rank と一致するということは, L が V の解を十分多く含んでいるという意味をもつ.

3.4. 主結果

(I) Galois 対応.

L/K : PV 拡大 のとき, $H = (A \otimes_K A)^D$ が K^D 上の可換 Hopf 代数の構造をもち,

$$\{\text{中間 AS } D\text{-加群代数}\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{H \supset I \quad \text{Hopf ideal}\}$$
$$(\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\mathbb{G} = \operatorname{Spec} H \text{ の closed subgroup scheme}\})$$

(II) splitting algebra の存在性と一意性.

K : AS D-加群代数

V : $K\#D$-加群 ($\Rightarrow$ 自由 K-加群)

K^D が代数閉体, $\mathrm{rank}_K V < \infty$ のとき, V の splitting algebra L で, L/K が PV 拡大になるものが一意的に存在する.

(III) 圏同値.

$\mathrm{rank}_K V < \infty$ のとき, V の splitting algebra L で, L/K が PV 拡大になるものが存在すれば,

$$\{\{V\}\} \approx \operatorname{Rep} \mathbb{G}.$$

ここで, $\{\{V\}\}$ は V と $V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ で "生成される" $({}_{K\#D}\mathcal{M}, \otimes_K)$ の abelian tensor subcategory.

(IV) PV 拡大の特徴づけ.

L/K を AS D-加群代数の拡大 s.t. $L^D = K^D$ とするとき,

$$L/K \text{ がある } V \in {}_{K\#D}\mathcal{M} \text{ の splitting algebra} \Leftrightarrow$$
$$L/K \text{ が (有限生成) PV 拡大.}$$

ちなみに, 最初の三角関数の例での A や H にあたるものは次の通り.

$L = \mathbb{R}(x, \sin x, \cos x) \supset A = \mathbb{R}(x)[\sin x, \cos x] \supset K = \mathbb{R}(x)$, $H = (A \otimes_K A)^\partial = \mathbb{R}[s, c]$, ただし,

$$s = (\sin x) \otimes (\cos x) - (\cos x) \otimes (\sin x),$$

$$c = (\cos x) \otimes (\cos x) + (\sin x) \otimes (\sin x),$$

$$\Delta(s) = s \otimes c + c \otimes s, \quad \Delta(c) = c \otimes c - s \otimes s,$$

$$\varepsilon(s) = 0, \quad \varepsilon(c) = 1$$

$$S(s) = -s, \quad S(c) = c$$